

Lista de exercícios – cap. 2 –

Nos problemas de 1 a 7 apresenta-se um conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verificar quais deles são espaços vetoriais. Para aqueles que não são espaços vetoriais, citar os axiomas que não se verificam.

$$1) \mathbb{R}^3, (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \\ k(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$2) \{(x, 2x, 3x); x \in \mathbb{R}\} \text{ com as operações usuais}$$

$$3) \mathbb{R}^2, (a, b) + (c, d) = (a, b) \text{ e } \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

$$4) \mathbb{R}^2, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ e } \alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$$

$$5) \mathbb{R}^2, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ e } \alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$$

$$6) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 5x\} \text{ com as operações usuais}$$

$$7) A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in M(2, 2) / a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ com as operações usuais}$$

Nos problemas 8 a 13 são apresentados subconjuntos de \mathbb{R}^2 . Verificar quais deles são subespaços vetoriais do \mathbb{R}^2 relativamente às operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

$$8) S = \{(x, y) / y = -x\}$$

$$9) S = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$$

$$10) S = \{(x, y) / x + 3y = 0\}$$

$$11) S = \{(y, y); y \in \mathbb{R}\}$$

$$12) S = \{(x, y) / y = x + 1\}$$

$$13) S = \{(x, y) / x \geq 0\}$$

Nos problemas 14 a 25 são apresentados subconjuntos de \mathbb{R}^3 . Verificar quais são seus subespaços em relação às operações de adição e multiplicação por escalar usuais. Para os que são subespaços, mostrar que as duas condições estão satisfeitas. Caso contrário, citar um contra-exemplo.

$$14) S = \{(x, y, z) / x = 4y \text{ e } z = 0\}$$

$$15) S = \{(x, y, z) / z = 2x - y\}$$

$$16) S = \{(x, y, z) / x = z^2\}$$

$$17) S = \{(x, y, z) / y = x + 2 \text{ e } z = 0\}$$

18) $S = \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\}$

19) $S = \{(x, x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$

20) $S = \{(x, y, z)/xy = 0\}$

21) $S = \{(x, y, z)/x = 0 \text{ e } y = |z|\}$

22) $S = \{(x, -3x, 4x); x \in \mathbb{R}\}$

23) $S = \{(x, y, z)/x \geq 0\}$

24) $S = \{(x, y, z)/x + y + z = 0\}$

25) $S = \{(4t, 2t, -t); t \in \mathbb{R}\}$

26) Verificar se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2,2)$:

a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; c = a + b \text{ e } d = 0 \right\}$

b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (matrizes triangulares superiores)

c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (matrizes simétricas)

d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

f) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; ad - bc \neq 0 \right\}$ (conjunto de matrizes inversíveis)

27) Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em \mathbb{R}^3 .

a) Escrever o vetor $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v .

b) Para que o valor de k o vetor $(-8, 14, k)$ é combinação linear de u e v ?

c) Determinar uma condição entre a, b e c para que o vetor (a, b, c) seja uma combinação linear de u e v .

28) Consideremos no espaço $P_2 = \{at^2 + bt + c / a, b, c \in \mathbb{R}\}$ os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.

a) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1 , p_2 e p_3 .

b) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1 e p_2 .

c) Determinar uma condição para a , b e c de modo que o vetor $at^2 + bt + c$ seja combinação linear de p_2 e p_3 .

d) É possível escrever p_1 como combinação linear de p_2 e p_3 ?

29) Seja o espaço vetorial $M(2,2)$ e os vetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

escrever o vetor:

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ como combinação linear dos vetores } v_1, v_2 \text{ e } v_3.$$

30) Escrever o vetor $0 \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores

a) $v_1 = (1,3)$ e $v_2 = (2,6)$

b) $v_1 = (1,3)$ e $v_2 = (2,5)$

31) Sejam os vetores $v_1 = (-1,2,1), v_2 = (1,0,2)$ e $v_3 = (-2,-1,0)$. Expressar cada um dos vetores $u = (-8,4,1), v = (0,2,3)$ e $w = (0,0,0)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3 .

32) Expressar o vetor $u = (-1,4,-4,6) \in \mathbb{R}^4$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (3,-3,1,0), v_2 = (0,1,-1,2)$ e $v_3 = (1,-1,0,0)$.

33) Seja S o subespaço do \mathbb{R}^4 definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y - z = 0 \text{ e } t = 0\}$$

Pergunta-se:

a) $(-1,2,3,0) \in S?$

b) $(3,1,4,0) \in S?$

c) $(-1,1,1,1) \in S?$

34) Seja S o subespaço de $M(2,2)$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 2a \\ a+b & -b \end{pmatrix} \right\}$$

a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S?$

b) Qual deve ser o valor de k para que o vetor $\begin{pmatrix} -4 & k \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ pertença a $S?$

35) Determinar os subespaços do \mathbb{R}^3 gerados pelos seguintes conjuntos:

a) $A = \{(2, -1, 3)\}$

b) $A = \{(-1, 3, 2), (2, -2, 1)\}$

c) $A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$

d) $A = \{(-1, 1, 0), (0, 1, -2), (-2, 3, 1)\}$

e) $A = \{(1,2,-1), (-1,1,0), (-3,0,1), (-2,-1,1)\}$

f) $A = \{(1,2,-1), (-1,1,0), (0,0,2), (-2,1,0)\}$

36) Seja o conjunto $A = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (-1,3,-1)$ e $v_2 = (1,-2,4)$.

Determinar:

a) O subespaço $G(A)$.

b) O valor de k para que o vetor $v = (5, k, 11)$ pertença a $G(A)$.

37) Sejam os vetores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,0)$ e $v_3 = (1,3,-1)$. Se $(3, -1, k) \in [v_1, v_2, v_3]$, qual o valor de k ?

38) Determinar os subespaços de P_2 (espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 2) gerados pelos seguintes vetores:

a) $p_1 = 2x + 2, p_2 = -x^2 + x + 3, p_3 = x^2 + 2x$

b) $p_1 = x^2, p_2 = x^2 + x$

c) $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2$

39) Determinar o subespaço $G(A)$ para $A = \{(1,-2), (-2,4)\}$. O que representa geometricamente esse subespaço?

40) Mostra que os vetores $v_1 = (2,1)$ e $v_2 = (1,1)$ geram o \mathbb{R}^2 .

41) Mostrar que os vetores $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$ geram o \mathbb{R}^3 .

42) Seja o espaço vetorial $M(2,2)$. Determinar seus subespaços gerados pelos vetores:

a) $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

43) Determinar o subespaço de P_3 (espaço dos polinômios de grau ≤ 3) gerado pelos vetores $p_1 = x^3 + 2x^2 - x + 3$ e $p_2 = -2x^3 - x + 3x + 2$.

44) Determinar o subespaço de \mathbb{R}^4 gerado pelos vetores $u = (2, -1, 1, 4), v = (3, 3, -3, 6)$ e $w = (0, 4, -4, 0)$.

45) Verificar se o vetor $v = (-1, -3, 2, 0)$ pertence ao subespaço do \mathbb{R}^4 gerado pelos vetores $v_1 = (2, -1, 3, 0), v_2 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 1, -1, 0)$.

46) Classificar os seguintes subconjuntos do \mathbb{R}^2 em Li ou LD:

a) $\{(1,3)\}$

b) $\{(1,3), (2,6)\}$

c) $\{(2,-1), (3,5)\}$

d) $\{(1,0), (-1,1), (3,5)\}$

47) Classificar os seguintes subconjuntos do \mathbb{R}^3 em LI ou LD:

a) $\{(2, -1, 3)\}$

b) $\{(1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$

c) $\{(2, -1, 0), (-1, 3, 0), (3, 5, 0)\}$

d) $\{(2, 1, 3), (0, 0, 0), (1, 5, 2)\}$

e) $\{(1, 2, -1), (2, 4, -2), (1, 3, 0)\}$

f) $\{(1, -1, -2), (2, 1, 1), (-1, 0, 3)\}$

g) $\{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 2), (3, -1, 2)\}$

48) Quais dos seguintes conjuntos de vetores pertencentes ao P_2 são LD?

a) $2 + x - x^2, -4 - x + 4x^2, x + 2x^2$

b) $1 - x + 2x^2, x - x^2, x^2$

c) $1 + 3x + x^2, 2 - x - x^2, 1 + 2x - 3x^2, -2 + x + 3x^2$

d) $x^2 - x + 1, x^2 + 2x$

49) Quais dos seguintes conjuntos de vetores do \mathbb{R}^4 são LD?

a) $(2, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 1), (-1, 2, 0, -1)$

b) $(0, 1, 0, -1), (1, 1, 1, 1), (-1, 2, 0, 1), (1, 2, 1, 0)$

c) $(1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 2, 1, -2)$

d) $(1, 1, 2, 4), (1, -1, -4, 2), (0, -1, -3, 1), (2, 1, 1, 5)$

50) Sendo V o espaço vetorial das matrizes 2×3 , verificar se $\{A, B, C\}$ é LI ou LD, sendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

51) Determinar o valor de k para que seja LI o conjunto $\{(-1, 0, 2), (1, 1, 1), (k, -2, 0)\}$

52) Determinar k para que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

seja LD.

53) Mostrar que são LD os vetores v_1, v_2 e v_3 com v_1 e v_2 vetores arbitrários de um espaço vetorial V e $v_3 = 2v_1 - v_2$.

54) Mostrar que se u, v e w são LI, então $u + v, u + w$ e $v + w$ são também LI.

55) Sendo $v_1 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, determinar $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{v_1, v_2\}$ seja base do \mathbb{R}^2 .

56) Verificar quais dos seguintes conjuntos de vetores formam a base do \mathbb{R}^2 :

- a) $\{(1, 2), (-1, 3)\}$
- b) $\{(3, -6), (-4, 8)\}$
- c) $\{(0, 0), (2, 3)\}$
- d) $\{(3, -1), (2, 3)\}$

57) Para que valores de k o conjunto $B = \{(1, k), (k, 4)\}$ é base do \mathbb{R}^2 ?

58) O conjunto $B = \{(2, -1), (-3, 2)\}$ é uma base do \mathbb{R}^2 . Escrever o vetor genérico do \mathbb{R}^2 como combinação linear de B .

59) Quais dos seguintes conjuntos formam uma base do \mathbb{R}^3 ?

- a) $(1, 1, -1), (2, -1, 0), (3, 2, 0)$
- b) $(1, 0, 1), (0, -1, 2), (-2, 1, -4)$
- c) $(2, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)$
- d) $(1, 2, 3), (4, 1, 2)$
- e) $(0, -1, 2), (2, 1, 3), (-1, 0, 1), (4, -1, -2)$

60) Quais dos seguintes conjuntos de vetores formam uma base de P_2 ?

- a) $2t^2 + t - 4, t^2 - 3t + 1$
- b) $1, t, t^2$
- c) $2, 1 - x, 1 + x^2$
- d) $1 + x + x^2, x + x^2, x^2$
- e) $1 + x, x - x^2, 1 + 2x - x^2$

61) Mostrar que o conjunto

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

É uma base de $M(2, 2)$.

62) Mostrar que o conjunto

$\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 3), (0, 0, 0, 5)\}$ é base do \mathbb{R}^4 .

63) O conjunto

$A = \{t^3, 2t^2 - t + 3, t^3 - 3t^2 + 4t - 1\}$ é base de P_3 ? Justificar.

64) Mostrar que os vetores $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,2,3), v_3 = (3,0,2)$ e $v_4 = (2, -1,1)$ geram o \mathbb{R}^3 e encontrar uma base dentre os vetores v_1, v_2, v_3 e v_4 .

65) Mostrar que os polinômios $p_1 = 1 + 2x - 3x^2, p_2 = 1 - 3x + 2x^2$ e $p_3 = 2 - x + 5x^2$ formam uma base do espaço dos polinômios de grau ≤ 2 e calcular o vetor coordenada de $p = -2 - 9x - 13x^2$ na base $B = \{p_1, p_2, p_3\}$.

66) Determinar uma base do subespaço do \mathbb{R}^4 gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1,0,0), v_2 = (-2,2,2,1), v_3 = (-1,1,2,1)$ e $v_4 = (0,0,4,2)$.

67) Seja $V = \mathbb{R}^3$ e o conjunto

$$B = \{(0,1,1), (1,1,0), (1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

a) Mostrar que B não é base do \mathbb{R}^3 .

b) Determinar uma base do \mathbb{R}^3 que possua dois elementos de B .

68) Determinar o vetor coordenada de $v = (6,2)$ em relação às seguintes bases:

$$\alpha = \{(3,0), (0,2)\}$$

$$\beta = \{(1,2), (2,1)\}$$

$$\gamma = \{(1,0), (0,1)\}$$

$$\delta = \{(0,1), (1,0)\}$$

69) No espaço vetorial \mathbb{R}^3 , consideremos a seguinte base: $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (1, -1,1)\}$. Determinar o vetor coordenada de $v \in \mathbb{R}^3$ em relação à base B se:

a) $v = (2, -3,4)$ b) $v = (3,5,6)$ c) $v = (1, -1,1)$

70) Seja $A = \{3, 2x, -x^2\}$ uma base de P_2 . Determinar o vetor coordenada de $v = 6 - 4x + 3x^2$ em relação à base A .

71) Sejam os vetores $v_1 = (1,0, -1), v_2 = (1,2,1)$ e $v_3 = (0, -1,0)$ do \mathbb{R}^3 .

a) Mostrar que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é base do \mathbb{R}^3 .

b) Escrever $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ como combinação linear dos vetores da base B .

72) Determinar a dimensão e uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 3x\}$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 5x \text{ e } z = 0\}$

- c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$
 d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 3y \text{ e } z = -y\}$
 e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0\}$
 f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$

73) Determinar a dimensão e uma base para cada um dos seguintes subespaços vetoriais de $M(2,2)$:

- a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; ; b = a + c \text{ e } d = c \right\}$
 b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; ; b = a + c \right\}$
 c) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; ; c = a - 3b \text{ e } d = 0 \right\}$
 d) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a + d = b + c \right\}$

74) Seja o subespaço S de $M(2,2)$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / c = a + b \text{ e } d = a \right\}$$

- a) Qual a dimensão de S ?
 b) O conjunto:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

É uma base de S ? Justificar.

75) Encontrar uma base e a dimensão do espaço-solução dos sistemas:

a)
$$\begin{cases} x + 2y - 2z - t = 0 \\ 2x + 4y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 2t = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 4x + 3y - z + 5t = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + 2y - 4z + 2t = 0 \end{cases}$$

Respostas dos problemas propostos

- 1.** Não é espaço vetorial. Falha o axioma M4
- 2.** O conjunto é um espaço vetorial
- 3.** Não é espaço vetorial. Falham os axiomas A2, A3 e A4
- 4.** Não é espaço vetorial. Falha o axioma M2
- 5.** Não é espaço vetorial falha o axioma M4
- 6.** O conjunto é um espaço vetorial
- 7.** O conjunto é um espaço vetorial
- 8.** S é subespaço
- 9.** S não é subespaço
- 10.** É
- 11.** É
- 12.** Não é
- 13.** Não é
- 14.** É
- 15.** É
- 16.** Não é
- 17.** Não é
- 18.** É
- 19.** É
- 20.** Não é
- 21.** Não é
- 22.** É
- 23.** Não é
- 24.** É
- 25.** É
- 26.** São subespaços a), b), c), d)
- 27.** a) $w = 3u - v$

b) $k = 12$

c) $16a + 10b - c = 0$

28. a) $p = 3p^1 + 2p^2 + p^3$

b) impossível

c) $a + 2b - c = 0$

d) não é possível

29. $v = 4v^1 + 3v^2 - 2v^3$

30. a) $0 = -2v^1 + v^2$

b) $0 = 0v^1 + 0v^2$

31. $u = 3v^1 - v^2 + 2v^3$

$v = v^1 + v^2$

$w = 0v^1 + 0v^2 + 0v^3$

32. $v = -v^1 + 3v^2 + 2v^3$

33. a) sim

b) não

c) não

34. a) sim

b) $k = -2$

35. a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -2y \text{ e } z = -3y\}$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 7x + 5y - 4z = 0\}$

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$

d) \mathbb{R}^3

e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 0\}$

f) \mathbb{R}^3

36. a) $G(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 10x + 3y - z = 0\}$

b) $k = -13$

37. $k = 7$

38. a) $\{ax^2 + bx + c / b = 2a + c\}$

b) $\{ax^2 + bx / a, b \in \mathbb{R}\}$

c) P2

39. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -2x\}$

Representa uma reta que passa pela origem.

40. $(x, y) = (x - y)(2, 1) + (-x + 2y)(1, 1)$

41. $(x, y, z) = xv^1 + (y - x)v^2 + (z - y)v^3$

42. a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; b = -2a - 5d \text{ e } c = -a - d \right\}$

b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a + b - c + d = 0 \right\}$

43. $\{ax^3 + bx^2 + cx + d / b = 5a + 3c \text{ e } d = 11a + 8c\}$

44. $\{(x, y, z, t) / 2x - t = 0 \text{ e } y + z = 0\}$

45. Pertence

46. a) LI

b) LD

c) LI

d) LD

47. a) LI

b) LI

c) LD

d) LD

e) LD

f) LI

g) LD

48. a, c

49. b, d

50. LI

51. $k \neq -3$

52. $k = 3$

55. $v^2 \neq kv^1, \forall k \in \mathbb{R}$

56. a, d

57. $k \neq \pm 2$

58. $(x, y) = (2x + 3y)(2, -1) + (x + 2y)(-3, 2)$

59. a) , c)

60. b) , c), d)

63. Não. $G(A) \neq \mathbb{R}^3$

64. Base: $\{v^1, v^2, v^3\}$

65. $p\beta = (1, 5, -4)$

66. Uma base: $\{v^1, v^2\}$

67. Uma base: $\{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

68. $v\alpha = (2, 1)$

$$v\beta = \left(\frac{-2}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

$v\gamma = (6, 2)$

$v\delta = (2, 6)$

69. a) $v\beta = (-2, 1, 4)$

b) $v\beta = (-3, 11, 6)$

c) $v\beta = (0, 0, 1)$

70. $v\alpha = (2, -2, -3)$

71. a) B é LI e $V(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) = \frac{x - z}{2}v^1 + \frac{x + z}{2}v^2 + (x - y + z)v^3$$

b) $e^1 = \frac{1}{2}v^1 + \frac{1}{2}v^2 + v^3$

$e^2 = -v^3$

$$e^3 = -\frac{1}{2}v^1 + \frac{1}{2}v^2 + v^3$$

72. a) $\dim: 2$

b) $\dim: 1$

c) dim: 1

d) dim: 1

e) dim: 2

f) dim: 2

As bases ficarão a cargo do leitor.

73. a) dim: 2

b) dim: 3

c) dim: 2

d) dim: 3

74. a) 2

b) Não, porque

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \notin S$$

75. a) dim: 2

uma base: $\{(1,0,3,-5), (0,1,6,-10)\}$

b) dim: 2

uma base: $\{(0,-2,-1,1), (1,-3,-5,0)\}$

c) dim: 1

uma base: $\{(1,1,-1)\}$

d) dim: zero

não existe base

e) dim: 3

uma base: $\{(-1,0,0,1), (-1,1,0,0), (2,0,1,0)\}$