Lista de exercícios – cap. 3 –

1) Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Mostrar que cada operação a seguir define um produto interno no IR²:

a) $u \,.\, v = x_1 x_2 + y_1 y_2$
b) $u \,.\, v = 2x_1 x_2 + 5y_1 y_2$
c) $u \,.\, v = x_1 x_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2y_1 y_2$

2) Calcular o produto interno dos vetores $u = (1,1)$ e $v = (-3,2)$ segundo cada produto do exercício anterior.

3) Sejam os vetores $v1 = (x_1, y_1)$ e $v2 = (x_2, y_2)$ de $V = IR^2$. Verificar quais das funções $f\colon V \, x \, V \rightarrow IR$, definidas abaixo, são produtos internos em V:

a) $f(v1, v2) = 2x_1 x_2 + 3y_1 y_2$
b) $f(v1, v2) = x_1 x_2 - y_1 y_2$
c) $f(v1, v2) = x_1^2 x_2 + y_1 y_2^2$
d) $f(v1, v2) = 4x_1 x_2$
e) $f(v1, v2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + 1$
f) $f(v1, v2) = 3x_1 x_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3y_1 y_2$
g) $f(v1, v2) = 4x_1 x_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + y_1 y_2$
h) $f(v1, v2) = x_1 y_2 + x_2 y_1$

4) Sejam $V = IR^3$ e os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$. Verificar quais das seguintes funções são produtos internos sobre o IR³. (Para aquelas que não são produtos internos, citar os axiomas que não se verificam.)

a) $u \,.\, v = x_1 x_2 + 3y_1 y_2$
b) $u \,.\, v = 3x_1 x_2 + 5y_1 y_2 + 2z_1 z_2$
c) $u \,.\, v = 2x_1^2 y_1^2 + 3x_2^2 y_2^2 + z_1^2 z_2$
d) $u \,.\, v = x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2$
e) $u \,.\, v = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - x_2 y_1 - x_1 y_2$

5) Consideremos o seguinte produto interno em $P2$: $p \,.\, q = a_2 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_0$, sendo p=$a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $q = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$. Dados os vetores $p_1 = x^2 - 2x + 3$, $p_2 = 3x - 4$ e $p_3 = 1 - x^2$, calcular:

a) $p_1 \,.\, p_2$
b) $|p_1|$ e $|p_3|$
c) $|p_1 + p_2|$
d) $\frac{p_2}{|p_2|}$

e) co-seno do ângulo entre p_2 e p_3

6) Se

$u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

São matrizes quaisquer de M(2,2), a seguinte fórmula define um produto interno nesse espaço:

$$u\,.\,v = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

Dados os vetores:

$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}ev = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

determinar:
a) $|\, u + v \,|$
b) o ângulo entre u e v.

7) No espaço $V = P2$ consideremos o produto interno $f(t)\,.\,g(t) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Calcular $f(t)\,.\,g(t)$ e$|f(t)|$ para $f(t) = t^2 - 2t$ e $g(t) = t + 3$.

8) Verificar a desigualdade de Cauchy quando se tem:

a) $u = (2,-1)$e $v = (-2,-4)$ e o produto interno do problema 1b.
b) $u = -x^2 + x - 3$ e $v = 3x^2 - x + 1$ e o produto interno do problema 5.

9) Seja a função

$$f: IR^2\ x\ IR^2 \rightarrow M(1,1)$$
$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \rightarrow [x_1, y_1]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Mostrar que f é um produto interno em IR² e calcular:

a) A norma do vetor (1,3);
b) Um vetor unitário a partir de (1,3);
c) Um vetor ortogonal a (1,3).

10) Provar que se u e v são vetores de um espaço vetorial euclidiano, então:

a) u $\perp$v implica que $|\, u + v \,|^2 = |u|^2 + |v|^2$
(Interpretar geométricamente esse fato no IR² e no IR³.)

b) $(u + v) \,|\, (u - v)$ implica $|u| = |v|$

11) Consideremos, no IR³, o produto interno usual. Para que valores de m os vetores u e v são ortogonais?

a) $u = (3m, 2, -m)$ e $v = (-4,1,5)$
b) $u = (0, m, -1,4)$e $v = (5, m, -1, -1)$

12) Consideremos, no IR³, o seguinte produto interno:

$$(x_1, y_1, z_1) \,.\, (x_2, y_2, z_2) = 2x_1x_2 + y_1y_2 + 4z_1z_2$$

Determinar, em relação a esse produto interno, um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $u = (1, -1, 2)$ e$v = (2,1,0)$.

13) Seja $V = IR^3$ com o produto interno usual. Determinar um vetor u ∈ IR³ ortogonal aos vetores $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (5,1,3)$ e $v_3 = (2, -2, -3)$.

14) Determinar os vetores (a, b, c) para que o conjunto $B = \{(1, -3,2), (2,2,2), (a, b, c)\}$ seja uma base ortogonal do IR³ em relação ao produto interno usual. Construir a partir de B uma base ortonormal.

15) Seja $V = M(2,2)$ munido do produto interno definido no problema 6. Determinar x de modo que

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & x \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sejam ortogonais.

16) Seja P1 o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤1. Definimos o produto interno entre dois vetores p e q de P1, como segue:

$p \,.\, q = 2ac + ad + bc + 2bd$, sendo $\begin{cases} p(t) = at + b \\ q(t) = ct + d \end{cases}$

a) Calcular o ângulo entre $t - 1 \, e \, 3t$.
b) Encontrar um vetor r(t) ortogonal ao vetor $t - 1$.

17) Sejam $V = IR^3$ munido do produto interno usual e $A = \{(1, -1, -2)\}$ C(está contido) V. Encontre uma base ortogonal B de V tal que A C(está contido) B.

18) Sendo $V = IR4$munido do produto interno usual, determinar um vetor não-nulo v ∈ IR^4 que seja ortogonal a $v_1 = (1,1,1, -1)$,$v_2 = (1,2,0,1)$ e $v_3 = (-4,1,5,2)$.

19) Consideremos o seguinte produto interno no IR²:

$$(x_1, y_1) \,.\, (x_2, y_2) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5y_1y_2$$

Mostrar que, relativamente a esse produto interno, o conjunto $A = \{(1,0), (2, -1)\}$ é base ortonormal do IR².

20) O conjunto $B = \{(2, -1), (k, 1)\}$ é uma base ortogonal do IR² em relação ao produto interno:

$$(x_1, y_1) . (x_2, y_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$$

Determinar o valor de k e obter, a partir de B, uma base ortonormal.

21) Consideremos as seguintes bases do IR² e do IR³:

a) $B = \{(3,4), (1,2)\}$

b) $B = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,1,2)\}$

c) $B = \{(1,0,1), (1,0,-1), (0,3,4)\}$

Ortonormalizar essas bases pelo processo de Gram-Schmidt, segundo o produto interno usual de cada espaço.

22) O conjunto $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é uma base ortonormal do IR² com o produto interno usual. Determinar o vetor coordenada de $v = (2,4)$ em relação à base B. Utilizar o processo apresentado em 3.6.4.

23) Em relação ao produto interno usual, determinar uma base ortonormal dos seguintes subespaços vetoriais do IR³:

a) $S = \{(x, y, z) \in IR^3 / \ y - 2z = 0\}$

b) $S = \{(x, y, z) \in IR^3 / \ x + y + z = 0\}$

para o subespaço do IR^4 gerado pelos vetores $v_1 = (1,0,-1,1)$, $v_2 = (0,1,0,1)$ e $v_3 = (1,1,-1,2)$.

25) Seja $S = \{(x, y, z, 2x + 4y + 5z) / \ x, y, z \in IR\}$ subespaço de IR^4 com o produto interno usual. Seja $A = \{(1,2,-1,1), (2,-1,2,2)\}$ C S.

a) Ortonormalizar o conjunto A.

b) Completar o conjunto A de modo a transformá-lo numa base ortogonal de S.

26)$Seja\, V = IR^3$ munido do produto interno usual e $B = \{(1,2,-3), (2,-4,2)\}$. Determinar:

a) O subespaço S gerado por B.

b) O subespaço S$^{\perp}$.

27) Seja V= IR³ munido do produto interno usual. Dados os subespaços:

$$S1 = \{(x, y, z) \in IR^3 / \ x - 2y + 3z = 0\} \text{e}$$

$$S2 = \{t(2,1,-1) / \ t \in IR\}$$

Determinar S1$^{\perp}$ e S2$^{\perp}$.

28) Consideremos o subespaço $S = \{(x, y, z)/\ x - z = 0\}$ C IR³ com o produto interno:

$$(x, y, z) \,.\, (x', y', z') \;=\; 2xx' \;+\; 3yy' \;+\; 4zz'$$

Determinar $S^{\perp}$ e uma base de $S^{\perp}$.

Respostas de Problemas Propostos

2. a) -1

b) 4

c) 0

3. a), f), g)

4. a) Não é um produto interno. Falha o axioma P4.

b) É produto interno.

c) Não é produto interno. Falham os axiomas P2 e P3.

d) Não é produto interno. Falha o axioma P4.

e) É produto interno.

5. a) -18

b) $\sqrt{14}$e $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$

d)$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$

e) $cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$

6. a) $\sqrt{21}$

b) $\theta = arc\ cos\frac{4}{\sqrt{42}}$

7. $-\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{12}}$e $\sqrt{\frac{8}{15}}$

9. a) 5

b) $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$

c) t(-7,4)

11. a) $\frac{2}{17}$

b) 3 ou -1

12. $(\frac{2}{9}, -\frac{8}{9}, -\frac{1}{6})$

13. u = a(1,7,-4), a € IR

14. t(-5,1,4), t≠0

$\{\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}\right)\}$

15. x = 4

16. a) $\theta = arc\cos\frac{1}{2}$

b) t+1 (é uma das soluções)

17. {(1,-1,-2), (1,1,0),(-1,1,-1)} é uma delas.

18. Uma solução é (9, -8, 6, 7)

20. $k = -\frac{1}{3}$

$\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)\}$

21. a) $\{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\}$

b) {(1,0,0), (0,$\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$), (0, - $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)}

c) {($\frac{1}{\sqrt{2}}$,0,$\frac{1}{\sqrt{2}}$), ($\frac{1}{\sqrt{2}}$,0,- $\frac{1}{\sqrt{2}}$), (0,1,0)}

22. vb = ($3\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)

23. a) {(1,0,0), (0,- $\frac{2}{\sqrt{5}}$,$\frac{1}{\sqrt{5}}$)}

b) {($\frac{1}{\sqrt{2}}$, -$\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0), (- $\frac{1}{\sqrt{6}}$,- $\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{2}{\sqrt{6}}$)}

24. Existem infinitas bases ortonormais.

Uma delas:

$\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}\right)\}$

25. $\{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)\}$

26. a) S = {(x, y, z) € IR^3 / x+y+z = 0}

b) $S^{\perp} = \{(x, y, z) \in IR^3 \,/\, x = y = z\}$

27. $S_1^{\perp} = \{(x, -2x, 3x) / x \in IR\}$

$S_2^{\perp} = \{(x, y, z) \in IR^3 / 2x + y - z = 0\}$

28. $S^{\perp} = \{(-2z,0,z) / z \in IR\}$

Uma base: $\{(-2,0,1)\}$.