ÁLGEBRA LINEAR

Matrizes Semelhantes, Operador Ortogonal, Operador Simétrico

Prof. Susie C. Keller

Matrizes Semelhantes

- **Matrizes Semelhantes**

Seja T:V→V um operador linear. Se A e B são bases de V e $[T]_A$ e $[T]_B$ as matrizes que representam o operador linear nas bases A e B, respectivamente, então:

$$\boxed{[T]_B = ([I]_A^B)^{-1}\ [T]_A\ [I]_A^B}$$

Matrizes Semelhantes

- **Matrizes Semelhantes**

Seja $T:V\rightarrow V$ um operador linear. Se A e B são bases de V e $[T]_A$ e $[T]_B$ as matrizes que representam o operador linear nas bases A e B, respectivamente, então:

$$\boxed{[T]_B = ([I]_A^B)^{-1}\ [T]_A\ [I]_A^B}$$

De fato:

Pelo conceito de matriz de uma transformação linear

$$[T(v)]_A = [T]_A\ [v]_A \quad \textbf{(1)} \qquad\qquad [T(v)]_B = [T]_B\ [v]_B \quad \textbf{(2)}$$

Matrizes Semelhantes

Sendo $[I]_A^B$ a matriz-mudança de base de B para A, tem-se:

$$\boxed{[v]_A = [I]_A^B\,[v]_B \quad \text{e} \quad [T(v)]_A = [I]_A^B\,[T(v)]_B}$$

Matrizes Semelhantes

Sendo $[I]_A^B$ a matriz-mudança de base de B para A, tem-se:

$$[v]_A = [I]_A^B \, [v]_B \quad \text{e} \quad [T(v)]_A = [I]_A^B \, [T(v)]_B$$

Substituindo $[v]_A$ e $[T(v)]_A$ em (1), resulta:

$$\boxed{[I]_A^B \, [T(v)]_B = [T]_A \, [I]_A^B \, [v]_B}$$

$$\boxed{[T(v)]_A = [T]_A \, [v]_A \quad \textbf{(1)}}$$

Matrizes Semelhantes

Sendo $[I]_A^B$ a matriz-mudança de base de B para A, tem-se:

$$[v]_A = [I]_A^B \, [v]_B \quad \text{e} \quad [T(v)]_A = [I]_A^B \, [T(v)]_B$$

Substituindo $[v]_A$ e $[T(v)]_A$ em (1), resulta:

$$[I]_A^B \, [T(v)]_B = [T]_A \, [I]_A^B \, [v]_B$$

Como a matriz $[I]_A^B$ é inversível

$$\boxed{[T(v)]_B = ([I]_A^B)^{-1} \, [T]_A \, [I]_A^B \, [v]_B}$$

Matrizes Semelhantes

Comparando essa igualdade com a (2), conclui-se:

$$\boxed{[T]_B = ([I]_A^B)^{-1}\ [T]_A\ [I]_A^B}$$

$$\boxed{[T(v)]_B = ([I]_A^B)^{-1}\ [T]_A\ [I]_A^B\ [v]_B}$$

$$\boxed{[T(v)]_B = [T]_B\ [v]_B \quad \textbf{(2)}}$$

Matrizes Semelhantes

Comparando essa igualdade com a (2), conclui-se:

$$[T]_B = ([I]_A^B)^{-1}\ [T]_A\ [I]_A^B$$

Fazendo $[I]_A^B = M$, a relação acima fica:

$$\boxed{[T]_B = M^{-1}\ [T]_A\ M}$$

As matrizes $[T]_A$ e $[T]_B$ são chamadas *semelhantes*.

Matrizes Semelhantes

- **Propriedade:**
  - As matrizes $[T]_A$ e $[T]_B$ possuem o mesmo determinante.

$$[T]_B = M^{-1}\,[T]_A M$$

$$M\,[T]_B = [T]_A M$$

$$\det M \,.\, \det [T]_B = \det [T]_A \,.\, \det M$$

$$\det [T]_B = \det [T]_A$$

Operador Ortogonal

- **Operador Ortogonal**

  Seja V um espaço vetorial euclidiano. Um operador $T:V\rightarrow V$ é *ortogonal* se preserva o módulo de cada vetor, isto é, se para qualquer $v \in V$:

$$|T(v)| = |v|$$

- Observações:
  - Os operadores ortogonais são definidos nos espaços vetoriais euclidianos;
  - Nos operadores ortogonais serão consideradas somente bases ortonormais.

Operador Ortogonal

- Exemplo:

No $\mathbb{R}^2$, com o produto interno usual, o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y) \quad \text{é ortogonal.}$$

$$|T(x, y)| = \sqrt{(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y)^2 + (\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y)^2}$$

Operador Ortogonal

- Exemplo:

No $\mathbb{R}^2$, com o produto interno usual, o operador linear definido por:

$$T(x, y) = \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y\right) \quad \text{é ortogonal.}$$

$$|T(x, y)| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)^2 + \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y\right)^2}$$

$$|T(x, y)| = \sqrt{\frac{16}{25}x^2 + \frac{24}{25}xy + \frac{9}{25}y^2 + \frac{9}{25}x^2 - \frac{24}{25}xy + \frac{16}{25}y^2} =$$

Operador Ortogonal

- Exemplo:

No $\mathbb{R}^2$, com o produto interno usual, o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y) \quad \text{é ortogonal.}$$

$$|T(x, y)| = \sqrt{(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y)^2 + (\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y)^2}$$

$$|T(x, y)| = \sqrt{\frac{16}{25}x^2 + \frac{24}{25}xy + \frac{9}{25}y^2 + \frac{9}{25}x^2 - \frac{24}{25}xy + \frac{16}{25}y^2} = \sqrt{\frac{25}{25}x^2 + \frac{25}{25}y^2}$$

$$|T(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)|, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Operador Ortogonal

- Observação:

O produto interno de dois vetores $u = (a_1, ..., a_n)$ e $v = (b_1, ..., b_n)$, em relação a uma base ortonormal, é dado por:

$$u \cdot v = a_1 b_1 + ... + a_n b_n$$

Se esses vetores forem expressos na forma matricial:

$$[u] = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad e \quad [v] = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

conclui-se que:

$$[u \cdot v] = [u]^t [v]$$

Operador Ortogonal

- **Propriedades:**

1. Seja T: V→V um operador ortogonal sobre o espaço euclidiano V. Então a inversa da matriz de T coincide com a transposta.

$$[T]^{-1} = [T]^{t}$$

De fato:

$$|v| = |T(v)|$$

ou:

$$\sqrt{v \cdot v} = \sqrt{T(.v) \cdot T(.v)}$$

Operador Ortogonal

isto é:

$$v \cdot v = T(v) \cdot T(v)$$

ou:

$$[v \cdot v] = [T(v) \cdot T(v)]$$

Operador Ortogonal

isto é:

$$v \cdot v = T(v) \cdot T(v)$$

ou:

$$[v \cdot v] = [T(v) \cdot T(v)]$$

ou ainda:

$$[v]^t \, [v] = [T(v)]^t \, [T(v)]$$

mas:

$$[T(v)]^t \, [T(v)] = ([T] \, [v])^t \, [T] \, [v] = [v]^t \, [T]^t \, [T] \, [v]$$

Operador Ortogonal

logo:

$$[v]^t\,[v] = [v]^t\,[T]^t\,[T]\,[v]$$

e, finalmente:

$$[T]^t\,[T] = I$$

ou:

$$[T]^t = [T]^{-1}$$

Operador Ortogonal

2. O determinante de uma matriz ortogonal é +1 ou -1.

Sendo $[T]$ ortogonal, $[T]^t [T] = I$.

Logo:

$$\det([T]^t [T]) = \det I$$

ou:

$$\det [T]^t \det [T] = 1$$

Operador Ortogonal

Como $\det [T] = \det [T]^t$, vem:

$$(\det [T])^2 = 1$$

ou seja:

$$\det [T] = +1 \quad \text{ou} \quad \det [T] = -1$$

Dessa propriedade conclui-se que todo operador linear ortogonal é inversível.

Operador Ortogonal

3. Todo operador linear ortogonal $T: V \to V$ preserva o produto interno entre vetores, isto é, para quaisquer vetores $u, v \in V$, tem-se:

$$u \, . \, v = T(u) \, . \, T(v)$$

De fato:

$$[T(u) \, . \, T(v)] = [T(u)]^t \, [T(v)] = ([T] \, [u])^t \, [T] \, [v] = [u]^t \, [T]^t \, [T] \, [v]$$

mas

$$[T]^t \, [T] = I$$

Operador Ortogonal

logo:

$$[T(u) \,.\, T(v)] = [u]^t \,[v] = [u \,.\, v]$$

e:

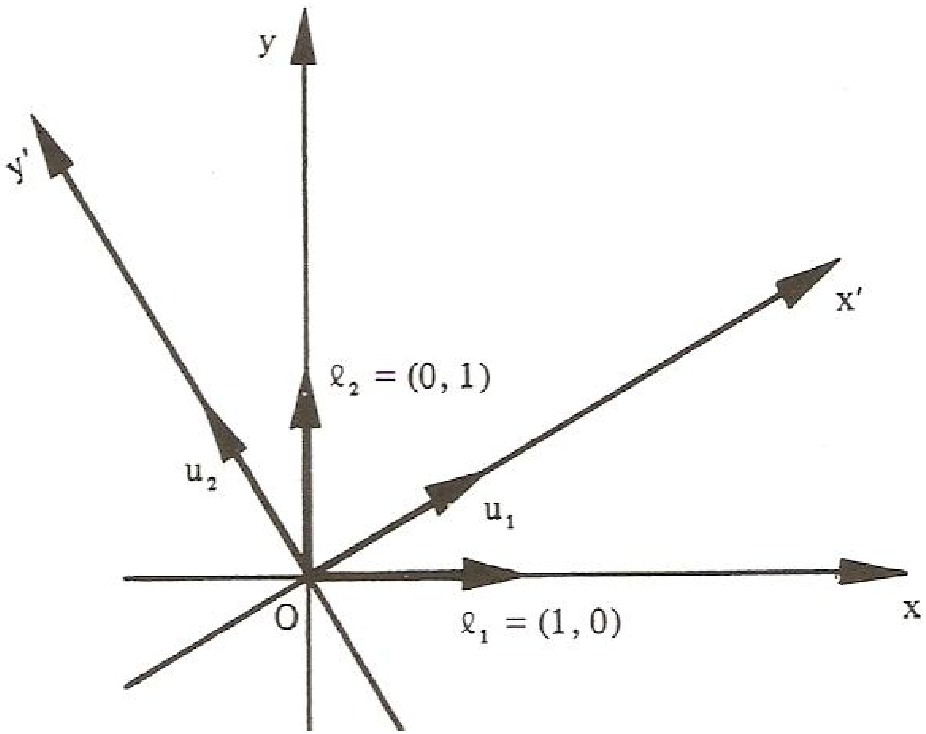
$$u \,.\, v = T(u) \,.\, T(v)$$

- Observações:
  - Todo o operador ortogonal preserva o ângulo entre vetores, isto é o ângulo entre u e v é igual ao ângulo entre T(u) e T(v).
  - Todo o operador ortogonal T transforma bases ortonormais em bases ortonormais, isto é, se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é base ortonormal de V então $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ também é base ortonormal de V .

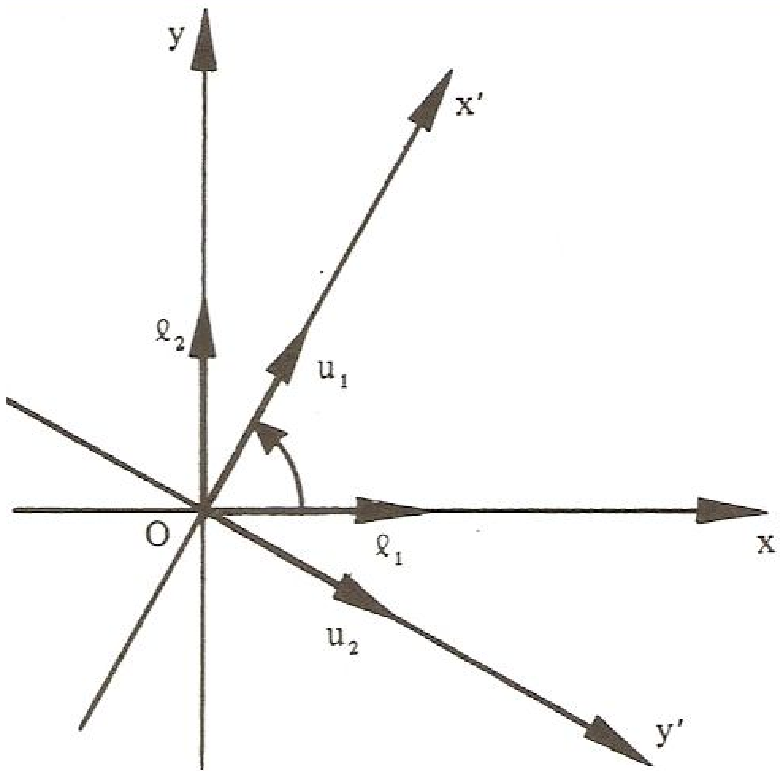
Operador Ortogonal

- Uma base ortonormal $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ pode ser obtida de duas formas:
  - Por meio da rotação da base canônica e nesse caso o det[T] = 1;
  - Por meio da rotação da base canônica, seguida de uma reflexão na origem de apenas um dos vetores (ou vice-versa) e nesse caso o det[T] = -1;

Operador Ortogonal



ROTAÇÃO



ROTAÇÃO e REFLEXÃO

Operador Ortogonal

4. A composta de duas transformações ortogonais é uma transformação ortogonal ou, equivalentemente, o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

5. As colunas (ou linhas) de uma matriz ortogonal são vetores ortonormais.

Exemplo: Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Operador Ortogonal

Os vetores-colunas de A são:

$$u_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \quad u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad e \quad u_3 = (0, 1, 0)$$

e:

$$|u_1| = |u_2| = |u_3| = 1$$

e também:

$$u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_3 = u_2 \cdot u_3 = 0$$

logo, o conjunto:

$$\{u_1, u_2, u_3\}$$

é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$.

Operador Simétrico

- **Operador Simétrico**
  - Diz-se que um operador é *simétrico* se a matriz que o representa numa base ortonormal A é simétrica, isto é, se:

$$[T]_A^t = [T]_A$$

  - Observações:
    - A matriz do operador simétrico é sempre simétrica, independente da base ortonormal do espaço.
    - O operador simétrico é também chamado de operador auto-adjunto.

Operador Simétrico

- Exemplo:

No $\mathbb{R}^3$ o operador T definido por:

$$T(x, y, z) = (x - y, -x + 3y - 2z, -2y)$$

é simétrico e sua matriz canônica é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Operador Simétrico

- **Propriedade:**
  - Seja V um espaço vetorial euclidiano. Se $T:V \rightarrow V$ é um operador simétrico, então para quaisquer vetores $u,v \in V$, tem-se:

$$T(u) \cdot v = u \cdot T(v)$$

De fato:

$$[T(u) \, . \, v] = [T(u)]^t \, [v] = ([T] \, [u])^t \, [v] = [u]^t \, [T]^t \, [v]$$

$$= [u]^t \, ([T] \, [v]) = [u \, . \, T(v)]$$

$$T(u) \, . \, v = u \, . \, T(v)$$