Lista de exercícios para entregar

Nos problemas abaixo apresenta-se um conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verificar quais deles são espaços vetoriais. Para aqueles que não são espaços vetoriais, citar os axiomas que não se verificam.

1) $IR^3, (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ e $k(x, y, z) = (0,0,0)$

2) $IR^2, (a, b) + (c, d) = (a, b)\ e\ \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$

Nos problemas abaixo são apresentados subconjuntos de IR². Verificar quais deles são subespaços vetoriais do IR² relativamente às operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

3) $S = \{(x, y)/y = -x\}$

4) $S = \{(x, y)/\ x + 3y = 0\}$

Nos problemas abaixo são apresentados subconjuntos de IR³. Verificar quais são seus subespaços em relação às operações de adição e multiplicação por escalar usuais. Para os que são subespaços, mostrar que as duas condições estão satisfeitas. Caso contrário, citar um contra-exemplo.

5) $S = \{(x, y, z)/x = z^2\}$

6) $S = \{(x, y, z)/\ x + y + z = 0\}$

Verificar se os subconjuntos abaixo são subespaços de M(2,2):

7) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix};\ \text{a, b } \in \text{IR}\right\}$

8) $S = \left\{\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & b \end{pmatrix};\ \text{a, b } \in \text{IR}\right\}$

9) Consideremos no espaço $P2 = \{at^2 + bt + c/\ a, b, c \in IR\}$ os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.

a) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.

b) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1 ep_2.

c) Determinar uma condição para a, b e c de modo que o vetor $at^2 + bt + c$ seja combinação linear de p_2 e p_3.

d) É possível escrever p_1 como combinação linear de p_2 e p_3?

10) Seja o espaço vetorial M(2,2) e os vetores:

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

escrever o vetor $v = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$,como combinação linear dos vetores v_1,v_2 e v_3.

11) Seja S o subespaço do IR^4 definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in IR4 \ / \ x + 2y - z = 0 \ e \ t = 0\}$$

Pergunta-se:

a)$(-1,2,3,0) \in S$?

b)$(3,1,4,0) \in S$?

c)$(-1,1,1,1)\in$ S?

12) Seja S o subespaço de M(2,2):

$$S = \left\{\begin{pmatrix} a - b & 2a \\ a + b & -b \end{pmatrix}\right\}$$

a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S$?

b) Qual deve ser o valor de k para que o vetor $\begin{pmatrix} -4 & k \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ pertença a S?

13) Determinar os subespaços do IR^3 gerados pelos seguintes conjuntos:

a) $A = \{(2, -1,3)\}$

b) $A = \{(1,0,1), (0,1,1), (-1,1,0)\}$

c) $A = \{(1,2, -1), (-1,1,0), (-3,0,1), (-2, -1,1)\}$

14) Sejam os vetores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,0)$ e $v_3 = (1,3, -1)$. Se $(3, -1, k) \in [v_1, v_2, v_3]$, qual o valor de k?

15) Determinar os subespaços de P2 (espaço vetorial dos polinômios de grau ≤2) gerados pelos seguintes vetores:

a) $p_1 = 2x + 2$, $p_2 = -x^2 + x + 3$, $p_3 = x^2 + 2x$
b) $p_1 = x^2$, $p_2 = x^2 + x$

16) Seja o espaço vetorial M(2,2). Determinar seus subespaços gerados pelos vetores:

a) $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b)$v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

17) Verificar se o vetor $v = (-1, -3,2,0)$ pertence ao subespaço do IR^4 gerado pelos vetores $v_1 = (2, -1,3,0)$, $v_2 = (1,0,1,0)$ e $v_3 = (0,1, -1,0)$.

18) Classificar os seguintes subconjuntos do IR² em Li ou LD:

a) $\{(1,3)\}$

b)$\{(1,3),(2,6)\}$

c) $\{(1,0),(-1,1),(3,5)\}$

19) Classificar os seguintes subconjuntos do IR³ em LI ou LD:

a) $\{(1,-1,1),(-1,1,1)\}$

b) $\{(2,1,3),(0,0,0),(1,5,2)\}$

c) $\{(1,2,-1),(1,0,0),(0,1,2),(3,-1,2)\}$

20) Quais dos seguintes conjuntos de vetores pertencentes ao P2 são LD?

a) $2 + x - x^2$, $-4 - x + 4x^2$, $x + 2x^2$

b) $x^2 - x + 1$, $x^2 + 2x$

21) Sendo V o espaço vetorial das matrizes 2 x 3, verificar se {A,B,C} é LI ou LD, sendo

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

22) Verificar quais dos seguintes conjuntos de vetores formam a base do IR²:

a) $\{(1,2),(-1,3)\}$
b) $\{(3,-6),(-4,8)\}$
c) $\{(0,0),(2,3)\}$

23) Quais dos seguintes conjuntos formam uma base do IR³?

a) $(2,1,-1),(-1,0,1),(0,0,1)$
b) $(1,2,3),(4,1,2)$
c) $(0,-1,2),(2,1,3),(-1,0,1),(4,-1,-2)$

24) Quais dos seguintes conjuntos de vetores formam uma base de P2?

a) $2t^2 + t - 4, t^2 - 3t + 1$
b) $2, 1 - x, 1 + x^2$

25) Mostrar que os polinômios $p_1 = 1 + 2x - 3x^2$,$p_2 = 1 - 3x + 2x^2$e $p_3 = 2 - x + 5x^2$ formam uma base do espaço dos polinômios de grau ≤2 e calcular o vetor coordenada de $p = -2 - 9x - 13x^2$ na base $B = \{p_1, p_2, p_3\}$.

26) Determinar o vetor coordenada de $v = (6,2)$ em relação às seguintes bases:

$$\alpha = \{(3,0),(0,2)\}$$

$$\beta = \{(1,2),(2,1)\}$$

27) Seja $A = \{3, 2x, -x^2\}$ uma base de P_2. Determinar o vetor coordenada de $v = 6 - 4x + 3x^2$ em relação à base A.

28) Determinar a dimensão e uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:

a) $\{(x, y, z) \in IR^3 / \ y = 5x \ e \ z = 0\}$

b) $\{(x, y, z) \in IR^3 / \ x = 3y \ e \ z = -y\}$

c) $\{(x, y, z) \in IR^3 / \ z = 0\}$

29) Determinar a dimensão e uma base para cada um dos seguintes subespaços vetoriais de M(2,2):

a) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \ \mathrm{b = a + c \quad e\ d = c}\right\}$

b) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \mathrm{c = a - 3b \ \ e\ d = 0}\right\}$

30) Encontrar uma base e a dimensão do espaço-solução dos sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y - 2z - t = 0 \\ 2x + 4y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 2t = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$

31) Sejam os vetores $v1 = (x_1, y_1)$ e $v2 = (x_2, y_2)$ de $V = IR^2$. Verificar quais das funções $f: V \ x \ V \rightarrow IR$, definidas abaixo, são produtos internos em V:

a) $f(v1, v2) = x_1x_2 - y_1y_2$
b) $f(v1, v2) = 4x_1x_2$
c) $f(v1, v2) = x_1x_2 + y_1y_2 + 1$

32) Consideremos o seguinte produto interno em $P2$: $p \, . \, q = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$, sendo p=$a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Dados os vetores $p_1 = x^2 - 2x + 3$,$p_2 = 3x - 4$ e $p_3 = 1 - x^2$, calcular:

a) $p_1 \, . \, p_2$
b) $|p_1|$ e $|p_3|$
c) $|p_1 + p_2|$
d) co-seno do ângulo entre p_2 ep_3

33) Se $u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

São matrizes quaisquer de M(2,2), a seguinte fórmula define um produto interno nesse espaço:

$$u \cdot v = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

Dados os vetores:

$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

determinar:
a) $|u + v|$
b) o ângulo entre u e v.

34) Consideremos, no IR³, o seguinte produto interno:

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = 2x_1x_2 + y_1y_2 + 4z_1z_2$$

Determinar, em relação a esse produto interno, um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $u = (1, -1, 2)$ e $v = (2, 1, 0)$.

35) Sendo V = IR^4 munido do produto interno usual, determinar um vetor não-nulo v Є IR^4 que seja ortogonal a $v_1 = (1,1,1,-1)$, $v_2 = (1,2,0,1)$ e $v_3 = (-4,1,5,2)$.

36) Consideremos o seguinte produto interno no IR²:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5y_1y_2$$

Mostrar que, relativamente a esse produto interno, o conjunto $A = \{(1,0), (2,-1)\}$ é base ortonormal do IR².

37) Consideremos as seguintes bases do IR² e do IR³:

a) $B = \{(3,4), (1,2)\}$

b) $B = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,1,2)\}$

Ortonormalizar essas bases pelo processo de Gram-Schmidt, segundo o produto interno usual de cada espaço.

38) Em relação ao produto interno usual, determinar uma base ortonormal dos seguintes subespaços vetoriais do IR³:

a) $S = \{(x, y, z) \in IR^3 / \ y - 2z = 0\}$

b) $S = \{(x, y, z) \in IR^3 / \ x + y + z = 0\}$

39) Seja $V = IR^3$ munido do produto interno usual e $B = \{(1,2,-3), (2,-4,2)\}$. Determinar:

a) O subespaço S gerado por B.

b) O subespaço $S^{\perp}$.

Dentre as seguintes funções, verificar quais são lineares:

40) $T: IR^2 \rightarrow IR^3$; $T(x, y) = (x - y, 3x, -2y)$

41)$T: R^2 \rightarrow IR^2$; $T(x, y) = (x^2 + y^2, x)$

42) $T: IR^3 \rightarrow IR, T(x, y, z) = -3x + 2y - z$

43) $T: IR^2 \rightarrow M(2,2), T(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 3x \\ -y & x + 2y \end{pmatrix}$

44) Seja $T: IR^3 \rightarrow IR^2$ uma transformação linear definida por $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,1,0) = (2,3)$ e $T(1,0,0) = (3,4)$.

a) Determinar $T(x, y, z)$
b) Determinar $v \in IR^3$ tal que $T(v) = (-3, -2)$
c) Determinar $v \in IR^3$ tal que $T(v) = (0,0)$.

45) Determinar a transformação linear $T: P_2 \rightarrow P_2$ tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$.

46) Seja o operador linear $T: IR^2 \rightarrow IR^2$, $T(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$.

Quais dos seguintes vetores pertencem a $N(T)$?
a) $(1, -2)$ b) $(2, -3)$ c) $(-3,6)$

47) Para o mesmo operador linear do exercício anterior, verificar quais dos vetores pertencem a $Im(T)$.

a) $(2,4)$ b) $(\frac{-1}{2}, -1)$ c) $(-1,3)$.

Nos problemas abaixo são apresentadas transformações lineares. Para cada uma delas:

a) Determinar o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justificar.

b) Determinar a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justificar.

c) Verificar o Teorema da Dimensão.

48) $T: IR^2 \rightarrow IR^2, T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$

49) $T: IR^3 \rightarrow IR^2, T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$

50) $T: M(2,2) \rightarrow IR^2, T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b,\ a + b)$