

Inequações

Resolução de inequações modulares

Giuliano Boava

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

- ▶ $|2| = 2$.

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

- ▶ $|2| = 2$.
- ▶ $|0| = 0$.

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

- ▶ $|2| = 2$.
- ▶ $|0| = 0$.
- ▶ $|-3| = 3$.

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

- ▶ $|2| = 2$.
- ▶ $|0| = 0$.
- ▶ $|-3| = 3$.

Mas isso você já sabia!

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

- ▶ $|2| = 2$.
- ▶ $|0| = 0$.
- ▶ $|-3| = 3$.

Mas isso você já sabia! O que tem que ficar claro aqui é que o resultado de módulo é calculado somente depois de analisar o número que está dentro do módulo.

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

- ▶ $|2| = 2$.
- ▶ $|0| = 0$.
- ▶ $|-3| = 3$.

Mas isso você já sabia! O que tem que ficar claro aqui é que o resultado de módulo é calculado somente depois de analisar o número que está dentro do módulo. Como você calcula os módulos abaixo?

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

- ▶ $|2| = 2$.
- ▶ $|0| = 0$.
- ▶ $|-3| = 3$.

Mas isso você já sabia! O que tem que ficar claro aqui é que o resultado de módulo é calculado somente depois de analisar o número que está dentro do módulo. Como você calcula os módulos abaixo?

- ▶ $|\text{☺}| = ?$

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

- ▶ $|2| = 2$.
- ▶ $|0| = 0$.
- ▶ $|-3| = 3$.

Mas isso você já sabia! O que tem que ficar claro aqui é que o resultado de módulo é calculado somente depois de analisar o número que está dentro do módulo. Como você calcula os módulos abaixo?

- ▶ $|\text{☺}| = ?$
- ▶ $|\text{☹}| = ?$

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

- ▶ $|2| = 2$.
- ▶ $|0| = 0$.
- ▶ $|-3| = 3$.

Mas isso você já sabia! O que tem que ficar claro aqui é que o resultado de módulo é calculado somente depois de analisar o número que está dentro do módulo. Como você calcula os módulos abaixo?

- ▶ $|\text{☺}| = ?$
- ▶ $|\text{☹}| = ?$
- ▶ $|z| = ?$

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

- ▶ $|2| = 2$.
- ▶ $|0| = 0$.
- ▶ $|-3| = 3$.

Mas isso você já sabia! O que tem que ficar claro aqui é que o resultado de módulo é calculado somente depois de analisar o número que está dentro do módulo. Como você calcula os módulos abaixo?

- ▶ $|\text{☺}| = ?$
- ▶ $|\text{☹}| = ?$
- ▶ $|z| = ?$
- ▶ $|x| = ?$

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

- ▶ $|2| = 2$.
- ▶ $|0| = 0$.
- ▶ $|-3| = 3$.

Mas isso você já sabia! O que tem que ficar claro aqui é que o resultado de módulo é calculado somente depois de analisar o número que está dentro do módulo. Como você calcula os módulos abaixo?

- ▶ $|\text{☺}| = ?$
- ▶ $|\text{☹}| = ?$
- ▶ $|z| = ?$
- ▶ $|x| = ?$

Na verdade a resposta é simples! Espere alguém lhe contar que números ☺, ☹, z e x representam.

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funciona o módulo.

- ▶ $|2| = 2$.
- ▶ $|0| = 0$.
- ▶ $|-3| = 3$.

Mas isso você já sabia! O que tem que ficar claro aqui é que o resultado de módulo é calculado somente depois de analisar o número que está dentro do módulo. Como você calcula os módulos abaixo?

- ▶ $|\text{☺}| = ?$
- ▶ $|\text{☹}| = ?$
- ▶ $|z| = ?$
- ▶ $|x| = ?$

Na verdade a resposta é simples! Espere alguém lhe contar que números ☺, ☹, z e x representam. Por exemplo, se $\text{☺} = -5$, então $|\text{☺}| = 5 = -\text{☺}$.

Preliminares

Mesmo se ninguém lhe contar que número \odot representa, você pode antecipar sua resposta para $|\odot|!$

Preliminares

Mesmo se ninguém lhe contar que número \odot representa, você pode antecipar sua resposta para $|\odot|$!

- ▶ Se alguém disser que \odot é um número menor que 0, então $|\odot| = -\odot$.

Preliminares

Mesmo se ninguém lhe contar que número \odot representa, você pode antecipar sua resposta para $|\odot|$!

- ▶ Se alguém disser que \odot é um número menor que 0, então $|\odot| = -\odot$.
- ▶ Se alguém disser que \odot é um número maior ou igual a 0, então $|\odot| = \odot$.

Preliminares

Mesmo se ninguém lhe contar que número ☺ representa, você pode antecipar sua resposta para $|\text{☺}|$!

- ▶ Se alguém disser que ☺ é um número menor que 0, então $|\text{☺}| = -\text{☺}$.
- ▶ Se alguém disser que ☺ é um número maior ou igual a 0, então $|\text{☺}| = \text{☺}$.

Estas duas frases se abreviam em notação matemática na forma

$$|\text{☺}| = \begin{cases} -\text{☺}, & \text{se } \text{☺} < 0 \\ \text{☺}, & \text{se } \text{☺} \geq 0. \end{cases}$$

Preliminares

Mesmo se ninguém lhe contar que número ☺ representa, você pode antecipar sua resposta para $|\text{☺}|$!

- ▶ Se alguém disser que ☺ é um número menor que 0, então $|\text{☺}| = -\text{☺}$.
- ▶ Se alguém disser que ☺ é um número maior ou igual a 0, então $|\text{☺}| = \text{☺}$.

Estas duas frases se abreviam em notação matemática na forma

$$|\text{☺}| = \begin{cases} -\text{☺}, & \text{se } \text{☺} < 0 \\ \text{☺}, & \text{se } \text{☺} \geq 0. \end{cases}$$

De uma forma mais visual, ficaria assim:



Preliminares

Exemplo

Represente a expressão $|x| + 2x - 3$ sem usar módulo.

Preliminares

Exemplo

Represente a expressão $|x| + 2x - 3$ sem usar módulo.

Solução

0

← Valor de x →

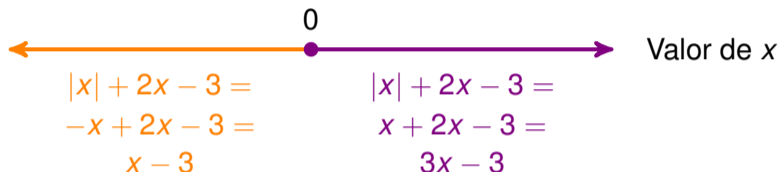
$$\begin{array}{l} |x| + 2x - 3 = \\ -x + 2x - 3 = \\ x - 3 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} |x| + 2x - 3 = \\ x + 2x - 3 = \\ 3x - 3 \end{array}$$

Preliminares

Exemplo

Represente a expressão $|x| + 2x - 3$ sem usar módulo.

Solução



Em frases, se escreveria

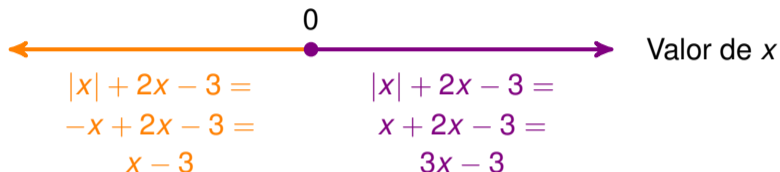
- ▶ Se alguém disser que x é um número menor que 0, então $|x| + 2x - 3 = x - 3$.
- ▶ Se alguém disser que x é um número maior ou igual a 0, então $|x| + 2x - 3 = 3x - 3$.

Preliminares

Exemplo

Represente a expressão $|x| + 2x - 3$ sem usar módulo.

Solução



Em frases, se escreveria

- ▶ Se alguém disser que x é um número menor que 0, então $|x| + 2x - 3 = x - 3$.
- ▶ Se alguém disser que x é um número maior ou igual a 0, então $|x| + 2x - 3 = 3x - 3$.

Em notação matemática, ficaria

$$|x| + 2x - 3 = \begin{cases} x - 3, & \text{se } x < 0 \\ 3x - 3, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Preliminares

Exemplo


Represente a expressão $|x - 2| - x - 3$ sem usar módulo.

Preliminares

Exemplo

Represente a expressão $|x - 2| - x - 3$ sem usar módulo.

Solução



Valor de x

$$\begin{array}{l} |x - 2| - x - 3 = \\ -(x - 2) - x - 3 = \\ -2x - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} |x - 2| - x - 3 = \\ x - 2 - x - 3 = \\ -5 \end{array}$$

Preliminares

Exemplo

Represente a expressão $|x - 2| - x - 3$ sem usar módulo.

Solução

← 2 → Valor de x

$$\begin{array}{l} |x - 2| - x - 3 = \\ -(x - 2) - x - 3 = \\ -2x - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} |x - 2| - x - 3 = \\ x - 2 - x - 3 = \\ -5 \end{array}$$

Em frases, se escreveria

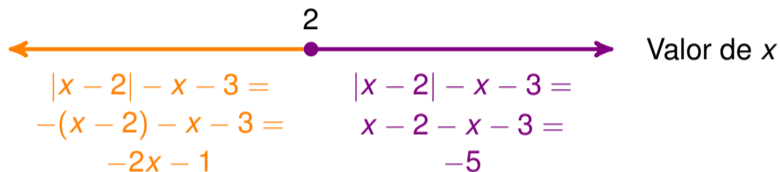
- ▶ Se alguém disser que x é um número menor que 2, então $|x - 2| - x - 3 = -2x - 1$.
- ▶ Se alguém disser que x é um número maior ou igual a 2, então $|x - 2| - x - 3 = -5$.

Preliminares

Exemplo

Represente a expressão $|x - 2| - x - 3$ sem usar módulo.

Solução



Em frases, se escreveria

- ▶ Se alguém disser que x é um número menor que 2, então $|x - 2| - x - 3 = -2x - 1$.
- ▶ Se alguém disser que x é um número maior ou igual a 2, então $|x - 2| - x - 3 = -5$.

Em notação matemática, ficaria

$$|x - 2| - x - 3 = \begin{cases} -2x - 1, & \text{se } x < 2 \\ -5, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Preliminares

Exemplo

Represente a expressão $|-3x + 5| + x - 1$ sem usar módulo.

Preliminares

Exemplo

Represente a expressão $|-3x + 5| + x - 1$ sem usar módulo.

Solução

$5/3$

Valor de x

$$\begin{array}{l} |-3x + 5| + x - 1 = \quad | -3x + 5| + x - 1 = \\ -3x + 5 + x - 1 = \quad -(-3x + 5) + x - 1 = \\ \quad -2x + 4 \qquad \qquad \qquad \quad 4x - 6 \end{array}$$

Preliminares


Exemplo

Represente a expressão $|-3x + 5| + x - 1$ sem usar módulo.

Solução

$5/3$

Valor de x


$$\begin{array}{l} | - 3x + 5 | + x - 1 = \quad | - 3x + 5 | + x - 1 = \\ - 3x + 5 + x - 1 = \quad - (- 3x + 5) + x - 1 = \\ \quad \quad \quad - 2x + 4 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 4x - 6 \end{array}$$

Em frases, se escreveria

- ▶ Se alguém disser que x é um número menor ou igual a $5/3$, então $|-3x + 5| + x - 1 = -2x + 4$.
- ▶ Se alguém disser que x é um número maior que $5/3$, então $|-3x + 5| + x - 1 = 4x - 6$.

Preliminares


Exemplo

Represente a expressão $|-3x + 5| + x - 1$ sem usar módulo.

Solução

$5/3$

Valor de x


$$\begin{array}{l} |-3x + 5| + x - 1 = \quad | -3x + 5| + x - 1 = \\ -3x + 5 + x - 1 = \quad -(-3x + 5) + x - 1 = \\ \quad -2x + 4 \qquad \qquad \qquad \quad 4x - 6 \end{array}$$

Em frases, se escreveria

- ▶ Se alguém disser que x é um número menor ou igual a $5/3$, então $|-3x + 5| + x - 1 = -2x + 4$.
- ▶ Se alguém disser que x é um número maior que $5/3$, então $|-3x + 5| + x - 1 = 4x - 6$.

Em notação matemática, ficaria

$$|-3x + 5| + x - 1 = \begin{cases} -2x + 4, & \text{se } x \leq 5/3 \\ 4x - 6, & \text{se } x > 5/3. \end{cases}$$

Preliminares

Exemplo

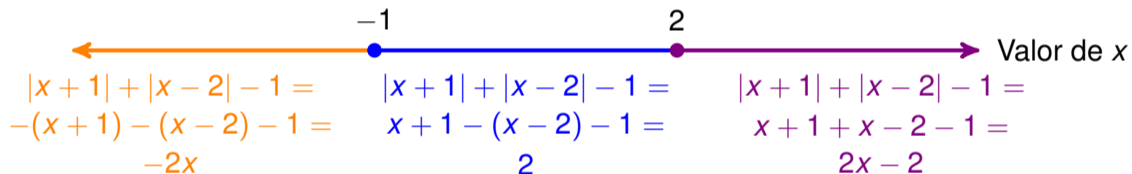
Represente a expressão $|x + 1| + |x - 2| - 1$ sem usar módulo.

Preliminares

Exemplo

Represente a expressão $|x + 1| + |x - 2| - 1$ sem usar módulo.

Solução

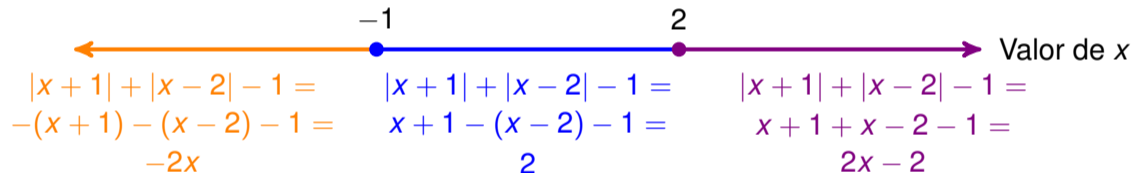


Preliminares

Exemplo

Represente a expressão $|x + 1| + |x - 2| - 1$ sem usar módulo.

Solução



Em notação matemática, ficaria

$$|x + 1| + |x - 2| - 1 = \begin{cases} -2x, & \text{se } x < -1 \\ 2, & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 2x - 2, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Como resolver inequações modulares?

Exemplo

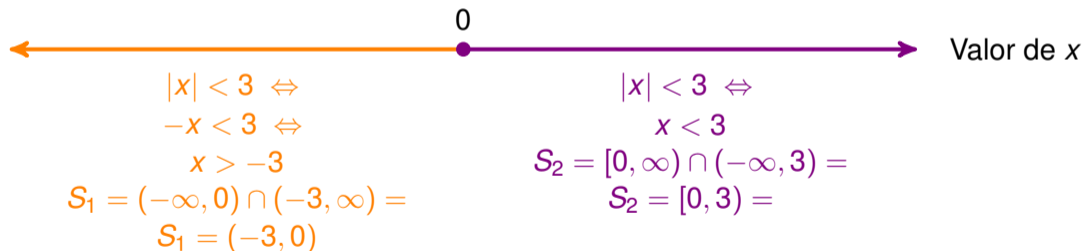
Resolva a inequação $|x| < 3$.

Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|x| < 3$.

Solução

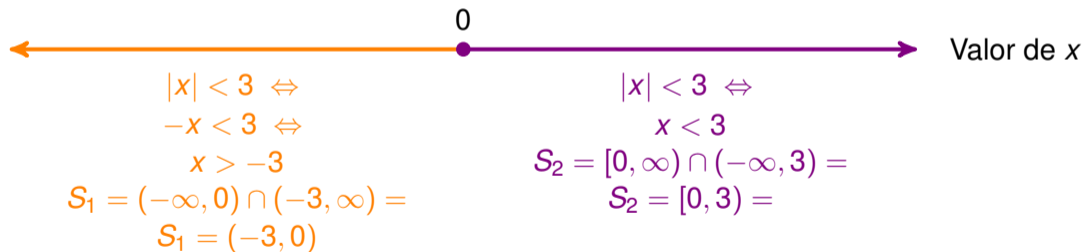


Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|x| < 3$.

Solução



Logo, a solução final é $S = S_1 \cup S_2 = (-3, 3)$.

Como resolver inequações modulares?

Exemplo

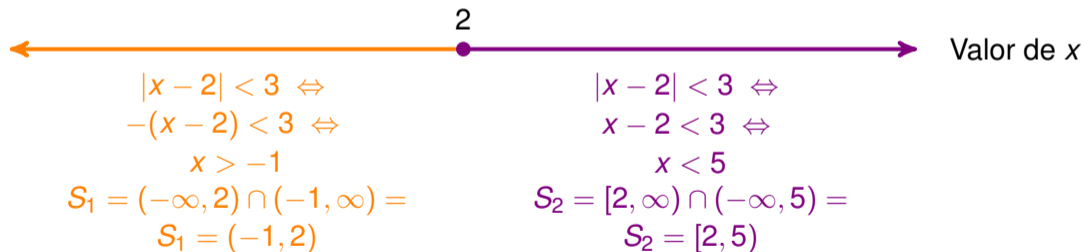
Resolva a inequação $|x - 2| < 3$.

Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|x - 2| < 3$.

Solução

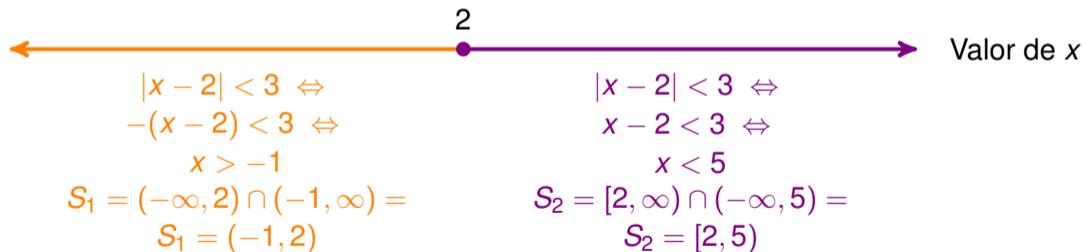


Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|x - 2| < 3$.

Solução



Logo, a solução final é $S = S_1 \cup S_2 = (-1, 5)$.

Como resolver inequações modulares?

Exemplo

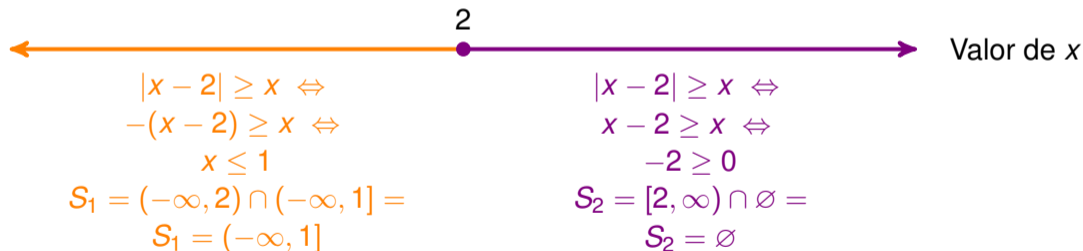
Resolva a inequação $|x - 2| \geq x$.

Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|x - 2| \geq x$.

Solução

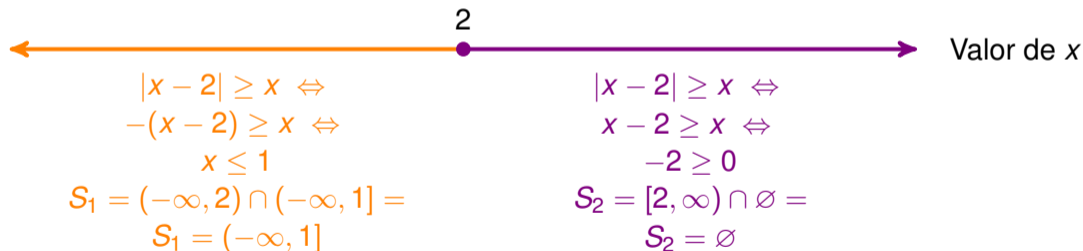


Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|x - 2| \geq x$.

Solução



Logo, a solução final é $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, 1]$.

Como resolver inequações modulares?

Às vezes, por falta de espaço, usamos uma organização diferente. Por exemplo, vamos reescrever a solução da inequação $|x - 2| \geq x$.

Como resolver inequações modulares?

Às vezes, por falta de espaço, usamos uma organização diferente. Por exemplo, vamos reescrever a solução da inequação $|x - 2| \geq x$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, 2)$.

$$|x - 2| \geq x \iff -(x - 2) \geq x \iff x \leq 1$$

Logo, $S_1 = (-\infty, 2) \cap (-\infty, 1] = (-\infty, 1]$.

- ▶ Caso 2. $x \in [2, \infty)$.

$$|x - 2| \geq x \iff x - 2 \geq x \iff -2 \geq 0$$

Logo, $S_2 = [2, \infty) \cap \emptyset = \emptyset$.

Logo, a solução final é $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, 1]$.

Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3|$.

Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3|$.

Solução



Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3|$.

Solução



► Caso 1. $x \in (-\infty, -1)$.

$$|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3| \iff$$

$$-x - 1 - (x) - 2x \geq -(x - 3) \iff$$

$$x \leq -4/3$$

Logo, $S_1 = (-\infty, -1) \cap (-\infty, -4/3] = (-\infty, -4/3]$.

Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3|$.

Solução



Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3|$.

Solução



► Caso 2. $x \in [-1, 0)$.

$$|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3| \iff$$

$$-(-x - 1) - (x) - 2x \geq -(x - 3) \iff$$

$$x \leq -2$$

Logo, $S_2 = [-1, 0) \cap (-\infty, -2] = \emptyset$.

Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3|$.

Solução



Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3|$.

Solução



► Caso 3. $x \in [0, 3)$.

$$|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3| \iff$$

$$-(-x - 1) + x - 2x \geq -(x - 3) \iff$$

$$x \geq 2$$

Logo, $S_3 = [0, 3) \cap [2, \infty) = [2, 3)$.

Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3|$.

Solução



Como resolver inequações modulares?

Exemplo

Resolva a inequação $|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3|$.

Solução



► Caso 4. $x \in [3, \infty)$.

$$|-x - 1| + |x| - 2x \geq |x - 3| \iff$$

$$-(-x - 1) + x - 2x \geq x - 3 \iff$$

$$x \leq 4$$

Logo, $S_4 = [3, \infty) \cap (-\infty, 4] = [3, 4]$.

Portanto, a solução final é $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = (-\infty, -4/3] \cup [2, 4]$.

Considerações finais

- ▶ Este método de separar em casos se aplica a qualquer tipo de equação ou inequação modular.

Considerações finais

- ▶ Este método de separar em casos se aplica a qualquer tipo de equação ou inequação modular.
- ▶ O método também se aplica a outros tipos de equações e inequações, sempre que, para poder tirar conclusões sobre o problema, é necessário ter informações prévias sobre a variável.

Considerações finais

- ▶ Este método de separar em casos se aplica a qualquer tipo de equação ou inequação modular.
- ▶ O método também se aplica a outros tipos de equações e inequações, sempre que, para poder tirar conclusões sobre o problema, é necessário ter informações prévias sobre a variável.
- ▶ Algumas inequações modulares possuem outros métodos de solução.

Considerações finais

- ▶ Este método de separar em casos se aplica a qualquer tipo de equação ou inequação modular.
- ▶ O método também se aplica a outros tipos de equações e inequações, sempre que, para poder tirar conclusões sobre o problema, é necessário ter informações prévias sobre a variável.
- ▶ Algumas inequações modulares possuem outros métodos de solução.
- ▶ Tenha certeza de que o vídeo não fez você aprender. Você só aprenderá de verdade após resolver muitos exercícios!

FIM