

Inequações

Resolução de inequações radiciais

Giuliano Boava

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funcionam as raízes e as potências.

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funcionam as raízes e as potências.

- ▶ $\sqrt{9} = 3$.
- ▶ $\sqrt{2}$.
- ▶ $\sqrt{0} = 0$.
- ▶ $\sqrt{-2}$ não está definida em \mathbb{R} .

Preliminares

Antes de tudo, precisamos entender como funcionam as raízes e as potências.

▶ $\sqrt{9} = 3.$

▶ $\sqrt{2}.$

▶ $\sqrt{0} = 0.$

▶ $\sqrt{-2}$ não está definida em $\mathbb{R}.$

▶ $\sqrt[3]{64} = 4.$

▶ $\sqrt[3]{2}.$

▶ $\sqrt[3]{0} = 0.$

▶ $\sqrt[3]{-8} = -2.$

▶ $\sqrt[3]{-3}.$

Preliminares

Que conclusões podemos tirar?

- ▶ $\sqrt{\odot}$ só está definida se $\odot \geq 0$.

Preliminares

Que conclusões podemos tirar?

- ▶ $\sqrt{\odot}$ só está definida se $\odot \geq 0$.
- ▶ $\sqrt[3]{\odot}$ está definida para qualquer $\odot \in \mathbb{R}$.

Preliminares

Que conclusões podemos tirar?

- ▶ $\sqrt{\odot}$ só está definida se $\odot \geq 0$.
- ▶ $\sqrt[3]{\odot}$ está definida para qualquer $\odot \in \mathbb{R}$.
- ▶ O resultado de $\sqrt{\odot}$ sempre é maior ou igual a 0. Em outras palavras, se $\sqrt{\odot}$ está definido, então $\sqrt{\odot} \geq 0$.

Preliminares

Que conclusões podemos tirar?

- ▶ $\sqrt{\odot}$ só está definida se $\odot \geq 0$.
- ▶ $\sqrt[3]{\odot}$ está definida para qualquer $\odot \in \mathbb{R}$.
- ▶ O resultado de $\sqrt{\odot}$ sempre é maior ou igual a 0. Em outras palavras, se $\sqrt{\odot}$ está definido, então $\sqrt{\odot} \geq 0$.
- ▶ $\sqrt{-2}$ não está definida em \mathbb{R} .

Preliminares

Que conclusões podemos tirar?

- ▶ $\sqrt{\odot}$ só está definida se $\odot \geq 0$.
- ▶ $\sqrt[3]{\odot}$ está definida para qualquer $\odot \in \mathbb{R}$.
- ▶ O resultado de $\sqrt{\odot}$ sempre é maior ou igual a 0. Em outras palavras, se $\sqrt{\odot}$ está definido, então $\sqrt{\odot} \geq 0$.
- ▶ $\sqrt{-2}$ não está definida em \mathbb{R} .
- ▶ O resultado de $\sqrt[3]{\odot}$ pode ser qualquer número real. O sinal de $\sqrt[3]{\odot}$ é o mesmo sinal de \odot .

Preliminares

Agora, façamos o mesmo com potências.

Preliminares

Agora, façamos o mesmo com potências.

▶ $5^2 = 25$.

▶ $0^2 = 0$.

▶ $(-3)^2 = 9$.

Preliminares

Agora, façamos o mesmo com potências.

▶ $5^2 = 25.$

▶ $0^2 = 0.$

▶ $(-3)^2 = 9.$

▶ $2^3 = 8.$

▶ $0^3 = 0.$

▶ $(-3)^3 = -27.$

Preliminares

Agora, façamos o mesmo com potências.

▶ $5^2 = 25.$

▶ $0^2 = 0.$

▶ $(-3)^2 = 9.$

▶ $2^3 = 8.$

▶ $0^3 = 0.$

▶ $(-3)^3 = -27.$

▶ $\sqrt{5^2} = 5.$

▶ $\sqrt{0^2} = 0.$

▶ $\sqrt{(-3)^2} = 3.$

Preliminares

Agora, façamos o mesmo com potências.

▶ $5^2 = 25.$

▶ $0^2 = 0.$

▶ $(-3)^2 = 9.$

▶ $2^3 = 8.$

▶ $0^3 = 0.$

▶ $(-3)^3 = -27.$

▶ $\sqrt{5^2} = 5.$

▶ $\sqrt{0^2} = 0.$

▶ $\sqrt{(-3)^2} = 3.$

▶ $\sqrt[3]{2^3} = 2.$

▶ $\sqrt[3]{0^3} = 0.$

▶ $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3.$

Preliminares

Que conclusões podemos tirar?

- ▶ $x^2 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Preliminares

Que conclusões podemos tirar?

- ▶ $x^2 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
- ▶ O sinal de x^3 é o mesmo sinal de x .

Preliminares

Que conclusões podemos tirar?

- ▶ $x^2 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
- ▶ O sinal de x^3 é o mesmo sinal de x .
- ▶ $\sqrt{x^2}$ sempre está definido. Porém, o resultado nem sempre é igual a x . De fato, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Preliminares

Que conclusões podemos tirar?

- ▶ $\odot^2 \geq 0$ para qualquer $\odot \in \mathbb{R}$.
- ▶ O sinal de \odot^3 é o mesmo sinal de \odot .
- ▶ $\sqrt{\odot^2}$ sempre está definido. Porém, o resultado nem sempre é igual a \odot . De fato, $\sqrt{\odot^2} = |\odot|$.
- ▶ $\sqrt{\odot^3} = \odot$ para qualquer $\odot \in \mathbb{R}$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Ao resolver inequações modulares, o que fizemos foi transformar a inequação modular em uma inequação sem módulo.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Ao resolver inequações modulares, o que fizemos foi transformar a inequação modular em uma inequação sem módulo.
- ▶ Aqui a ideia é a mesma: para resolver inequações radiciais, precisamos transformar em uma inequação sem raiz.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Ao resolver inequações modulares, o que fizemos foi transformar a inequação modular em uma inequação sem módulo.
- ▶ Aqui a ideia é a mesma: para resolver inequações radiciais, precisamos transformar em uma inequação sem raiz.
- ▶ A única forma de fazer isso é aplicando potências aos dois membros da inequação.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Ao resolver inequações modulares, o que fizemos foi transformar a inequação modular em uma inequação sem módulo.
- ▶ Aqui a ideia é a mesma: para resolver inequações radiciais, precisamos transformar em uma inequação sem raiz.
- ▶ A única forma de fazer isso é aplicando potências aos dois membros da inequação.
- ▶ Mas é nesse momento em que os erros são cometidos: aplicar potências sem se preocupar com os detalhes.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao quadrado?

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao quadrado?

- ▶ $2 < 5 \implies 2^2 < 5^2.$

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao quadrado?
 - ▶ $2 < 5 \implies 2^2 < 5^2$.
 - ▶ $-3 < 2 \not\implies (-3)^2 < 2^2$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao quadrado?
 - ▶ $2 < 5 \implies 2^2 < 5^2$.
 - ▶ $-3 < 2 \not\implies (-3)^2 < 2^2$.
 - ▶ $-3 < -2 \not\implies (-3)^2 < (-2)^2$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao quadrado?
 - ▶ $2 < 5 \implies 2^2 < 5^2$.
 - ▶ $-3 < 2 \not\implies (-3)^2 < 2^2$.
 - ▶ $-3 < -2 \not\implies (-3)^2 < (-2)^2$.
- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao cubo?

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao quadrado?

- ▶ $2 < 5 \implies 2^2 < 5^2$.
- ▶ $-3 < 2 \not\implies (-3)^2 < 2^2$.
- ▶ $-3 < -2 \not\implies (-3)^2 < (-2)^2$.

- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao cubo?

- ▶ $2 < 5 \implies 2^3 < 5^3$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao quadrado?

- ▶ $2 < 5 \implies 2^2 < 5^2$.
- ▶ $-3 < 2 \not\implies (-3)^2 < 2^2$.
- ▶ $-3 < -2 \not\implies (-3)^2 < (-2)^2$.

- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao cubo?

- ▶ $2 < 5 \implies 2^3 < 5^3$.
- ▶ $-3 < 2 \implies (-3)^3 < 2^3$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao quadrado?

- ▶ $2 < 5 \implies 2^2 < 5^2$.
- ▶ $-3 < 2 \not\implies (-3)^2 < 2^2$.
- ▶ $-3 < -2 \not\implies (-3)^2 < (-2)^2$.

- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao cubo?

- ▶ $2 < 5 \implies 2^3 < 5^3$.
- ▶ $-3 < 2 \implies (-3)^3 < 2^3$.
- ▶ $-3 < -2 \implies (-3)^3 < (-2)^3$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Uma desigualdade é preservada quando aplicamos raiz quadrada aos dois membros?

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Uma desigualdade é preservada quando aplicamos raiz quadrada aos dois membros? Sim, mas para isso os dois lados devem ser números maiores ou iguais a 0.
- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao cubo?

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Uma desigualdade é preservada quando aplicamos raiz quadrada aos dois membros? Sim, mas para isso os dois lados devem ser números maiores ou iguais a 0.
- ▶ Uma desigualdade é preservada ao elevar os dois membros ao cubo? Sim, sempre!!!

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x$.

Solução

$$\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x \implies$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x$.

Solução

$$\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x \implies$$

$$(\sqrt[3]{x^3 + x - 1})^3 \leq x^3 \iff$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x$.

Solução

$$\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x \implies$$

$$(\sqrt[3]{x^3 + x - 1})^3 \leq x^3 \iff$$

$$x^3 + x - 1 \leq x^3 \iff$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x$.

Solução

$$\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x \implies$$

$$(\sqrt[3]{x^3 + x - 1})^3 \leq x^3 \iff$$

$$x^3 + x - 1 \leq x^3 \iff$$

$$x \leq 1$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x$.

Solução

$$\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x \implies$$

$$(\sqrt[3]{x^3 + x - 1})^3 \leq x^3 \iff$$

$$x^3 + x - 1 \leq x^3 \iff$$

$$x \leq 1$$

Aqui, há um detalhe importante: não sabemos se a primeira etapa é uma equivalência. Dessa forma, não podemos garantir que a solução obtida é a solução que procuramos.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x$.

Solução

$$\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x \implies$$

$$(\sqrt[3]{x^3 + x - 1})^3 \leq x^3 \iff$$

$$x^3 + x - 1 \leq x^3 \iff$$

$$x \leq 1$$

Aqui, há um detalhe importante: não sabemos se a primeira etapa é uma equivalência. Dessa forma, não podemos garantir que a solução obtida é a solução que procuramos. Analisando os detalhes, concluímos que é, de fato, uma equivalência.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x$.

Solução

$$\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x \iff$$

$$(\sqrt[3]{x^3 + x - 1})^3 \leq x^3 \iff$$

$$x^3 + x - 1 \leq x^3 \iff$$

$$x \leq 1$$

Aqui, há um detalhe importante: não sabemos se a primeira etapa é uma equivalência. Dessa forma, não podemos garantir que a solução obtida é a solução que procuramos. Analisando os detalhes, concluímos que é, de fato, uma equivalência.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x$.

Solução

$$\sqrt[3]{x^3 + x - 1} \leq x \iff$$

$$(\sqrt[3]{x^3 + x - 1})^3 \leq x^3 \iff$$

$$x^3 + x - 1 \leq x^3 \iff$$

$$x \leq 1$$

Aqui, há um detalhe importante: não sabemos se a primeira etapa é uma equivalência. Dessa forma, não podemos garantir que a solução obtida é a solução que procuramos. Analisando os detalhes, concluímos que é, de fato, uma equivalência. Assim, a solução de fato é $S = (-\infty, 1]$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x - 2} < 3$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 3$.

$$\sqrt{x-2} < 3 \iff x-2 < 9$$

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 3$.

$$\sqrt{x-2} < 3 \iff x-2 < 9 \text{ e } x-2 \geq 0$$

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 3$.

$$\sqrt{x-2} < 3 \iff x-2 < 9 \text{ e } x-2 \geq 0 \iff x < 11 \text{ e } x \geq 2$$

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 3$.

$$\sqrt{x-2} < 3 \iff x-2 < 9 \text{ e } x-2 \geq 0 \iff x < 11 \text{ e } x \geq 2$$

Logo, $S = [2, 11)$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 3$.

$$\sqrt{x-2} < 3 \iff x-2 < 9 \text{ e } x-2 \geq 0 \iff x < 11 \text{ e } x \geq 2$$

Logo, $S = [2, 11)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 0$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 3$.

$$\sqrt{x-2} < 3 \iff x-2 < 9 \text{ e } x-2 \geq 0 \iff x < 11 \text{ e } x \geq 2$$

Logo, $S = [2, 11)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 0$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < -2$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 3$.

$$\sqrt{x-2} < 3 \iff x-2 < 9 \text{ e } x-2 \geq 0 \iff x < 11 \text{ e } x \geq 2$$

Logo, $S = [2, 11)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 0$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < -2$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} \leq 3$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 3$.

$$\sqrt{x-2} < 3 \iff x-2 < 9 \text{ e } x-2 \geq 0 \iff x < 11 \text{ e } x \geq 2$$

Logo, $S = [2, 11)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 0$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < -2$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} \leq 3$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} \leq 0$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 3$.

$$\sqrt{x-2} < 3 \iff x-2 < 9 \text{ e } x-2 \geq 0 \iff x < 11 \text{ e } x \geq 2$$

Logo, $S = [2, 11)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < 0$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} < -2$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} \leq 3$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} \leq 0$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} \leq -2$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x - 2} > 3$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 3$.

$$\sqrt{x-2} > 3 \iff x-2 > 9$$

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 3$.

$$\sqrt{x-2} > 3 \iff x-2 > 9 \iff x > 11$$

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 3$.

$$\sqrt{x-2} > 3 \iff x-2 > 9 \iff x > 11$$

Logo, $S = (11, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 3$.

$$\sqrt{x-2} > 3 \iff x-2 > 9 \iff x > 11$$

Logo, $S = (11, \infty)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 0$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 3$.

$$\sqrt{x-2} > 3 \iff x-2 > 9 \iff x > 11$$

Logo, $S = (11, \infty)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 0$.

$$\sqrt{x-2} > 0 \iff x-2 > 0$$

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 3$.

$$\sqrt{x-2} > 3 \iff x-2 > 9 \iff x > 11$$

Logo, $S = (11, \infty)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 0$.

$$\sqrt{x-2} > 0 \iff x-2 > 0 \iff x > 2$$

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 3$.

$$\sqrt{x-2} > 3 \iff x-2 > 9 \iff x > 11$$

Logo, $S = (11, \infty)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 0$.

$$\sqrt{x-2} > 0 \iff x-2 > 0 \iff x > 2$$

Logo, $S = (2, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 3$.

$$\sqrt{x-2} > 3 \iff x-2 > 9 \iff x > 11$$

Logo, $S = (11, \infty)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 0$.

$$\sqrt{x-2} > 0 \iff x-2 > 0 \iff x > 2$$

Logo, $S = (2, \infty)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > -2$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 3$.

$$\sqrt{x-2} > 3 \iff x-2 > 9 \iff x > 11$$

Logo, $S = (11, \infty)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 0$.

$$\sqrt{x-2} > 0 \iff x-2 > 0 \iff x > 2$$

Logo, $S = (2, \infty)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > -2$.

$$x-2 \geq 0 \iff x \geq 2$$

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 3$.

$$\sqrt{x-2} > 3 \iff x-2 > 9 \iff x > 11$$

Logo, $S = (11, \infty)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > 0$.

$$\sqrt{x-2} > 0 \iff x-2 > 0 \iff x > 2$$

Logo, $S = (2, \infty)$.

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} > -2$.

$$x-2 \geq 0 \iff x \geq 2$$

Logo, $S = [2, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x - 2} \geq 3$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x - 2} \geq 3$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x - 2} \geq 0$.

Como resolver uma inequação radical?

- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} \geq 3$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} \geq 0$.
- ▶ Resolva a inequação $\sqrt{x-2} \geq -2$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2$.

Solução

$$\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2$.

Solução

$$\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2 \text{ e } x^2 - x \geq 0 \text{ e } x - 2 \geq 0$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2$.

Solução

$$\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2 \text{ e } x^2 - x \geq 0 \text{ e } x - 2 \geq 0 \iff$$
$$\underbrace{x^2 - x \leq (x - 2)^2}_{\text{Inequação 1}} \text{ e } \underbrace{x^2 - x \geq 0}_{\text{Inequação 2}} \text{ e } \underbrace{x - 2 \geq 0}_{\text{Inequação 3}}$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2$.

Solução

$$\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2 \text{ e } x^2 - x \geq 0 \text{ e } x - 2 \geq 0 \iff$$
$$\underbrace{x^2 - x \leq (x - 2)^2}_{\text{Inequação 1}} \text{ e } \underbrace{x^2 - x \geq 0}_{\text{Inequação 2}} \text{ e } \underbrace{x - 2 \geq 0}_{\text{Inequação 3}}$$

- ▶ Resolvendo a inequação 1, obtemos $x^2 - x \leq x^2 - 4x + 4$ e, portanto, $S_1 = (-\infty, 4/3]$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2$.

Solução

$$\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2 \text{ e } x^2 - x \geq 0 \text{ e } x - 2 \geq 0 \iff$$
$$\underbrace{x^2 - x \leq (x - 2)^2}_{\text{Inequação 1}} \text{ e } \underbrace{x^2 - x \geq 0}_{\text{Inequação 2}} \text{ e } \underbrace{x - 2 \geq 0}_{\text{Inequação 3}}$$

- ▶ Resolvendo a inequação 1, obtemos $x^2 - x \leq x^2 - 4x + 4$ e, portanto, $S_1 = (-\infty, 4/3]$.
- ▶ Resolvendo a inequação 2, obtemos $S_2 = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2$.

Solução

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x} \leq x - 2 \text{ e } x^2 - x \geq 0 \text{ e } x - 2 \geq 0 &\iff \\ \underbrace{x^2 - x \leq (x - 2)^2}_{\text{Inequação 1}} \text{ e } \underbrace{x^2 - x \geq 0}_{\text{Inequação 2}} \text{ e } \underbrace{x - 2 \geq 0}_{\text{Inequação 3}} \end{aligned}$$

- ▶ Resolvendo a inequação 1, obtemos $x^2 - x \leq x^2 - 4x + 4$ e, portanto, $S_1 = (-\infty, 4/3]$.
- ▶ Resolvendo a inequação 2, obtemos $S_2 = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.
- ▶ Resolvendo a inequação 3, obtemos $S_3 = [2, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \leq x - 2$.

Solução

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x} \leq x - 2 \text{ e } x^2 - x \geq 0 \text{ e } x - 2 \geq 0 &\iff \\ \underbrace{x^2 - x \leq (x - 2)^2}_{\text{Inequação 1}} \text{ e } \underbrace{x^2 - x \geq 0}_{\text{Inequação 2}} \text{ e } \underbrace{x - 2 \geq 0}_{\text{Inequação 3}} \end{aligned}$$

- ▶ Resolvendo a inequação 1, obtemos $x^2 - x \leq x^2 - 4x + 4$ e, portanto, $S_1 = (-\infty, 4/3]$.
- ▶ Resolvendo a inequação 2, obtemos $S_2 = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.
- ▶ Resolvendo a inequação 3, obtemos $S_3 = [2, \infty)$.

Portanto, a solução final é $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x + 5} < x + 1$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x + 5} < x + 1$.

Solução

$$\sqrt{2x + 5} < x - 1$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x + 5} < x + 1$.

Solução

$$\sqrt{2x + 5} < x - 1 \text{ e } 2x + 5 \geq 0 \text{ e } x + 1 \geq 0$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} < x+1$.

Solução

$$\sqrt{2x+5} < x+1 \text{ e } 2x+5 \geq 0 \text{ e } x+1 \geq 0 \iff$$
$$\underbrace{2x+5 < (x+1)^2}_{\text{Inequação 1}} \text{ e } \underbrace{2x+5 \geq 0}_{\text{Inequação 2}} \text{ e } \underbrace{x+1 \geq 0}_{\text{Inequação 3}}$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} < x+1$.

Solução

$$\begin{array}{c} \sqrt{2x+5} < x-1 \text{ e } 2x+5 \geq 0 \text{ e } x+1 \geq 0 \iff \\ \underbrace{2x+5 < (x+1)^2}_{\text{Inequação 1}} \text{ e } \underbrace{2x+5 \geq 0}_{\text{Inequação 2}} \text{ e } \underbrace{x+1 \geq 0}_{\text{Inequação 3}} \end{array}$$

- ▶ Resolvendo a inequação 1, obtemos $2x+5 < x^2+2x+1$ e, portanto, $S_1 = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} < x+1$.

Solução

$$\sqrt{2x+5} < x-1 \text{ e } 2x+5 \geq 0 \text{ e } x+1 \geq 0 \iff$$
$$\underbrace{2x+5 < (x+1)^2}_{\text{Inequação 1}} \text{ e } \underbrace{2x+5 \geq 0}_{\text{Inequação 2}} \text{ e } \underbrace{x+1 \geq 0}_{\text{Inequação 3}}$$

- ▶ Resolvendo a inequação 1, obtemos $2x+5 < x^2+2x+1$ e, portanto, $S_1 = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.
- ▶ Resolvendo a inequação 2, obtemos $S_2 = [-5/2, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} < x+1$.

Solução

$$\sqrt{2x+5} < x+1 \text{ e } 2x+5 \geq 0 \text{ e } x+1 \geq 0 \iff$$
$$\underbrace{2x+5 < (x+1)^2}_{\text{Inequação 1}} \text{ e } \underbrace{2x+5 \geq 0}_{\text{Inequação 2}} \text{ e } \underbrace{x+1 \geq 0}_{\text{Inequação 3}}$$

- ▶ Resolvendo a inequação 1, obtemos $2x+5 < x^2+2x+1$ e, portanto, $S_1 = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.
- ▶ Resolvendo a inequação 2, obtemos $S_2 = [-5/2, \infty)$.
- ▶ Resolvendo a inequação 3, obtemos $S_3 = [-1, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} < x+1$.

Solução

$$\sqrt{2x+5} < x-1 \text{ e } 2x+5 \geq 0 \text{ e } x+1 \geq 0 \iff$$
$$\underbrace{2x+5 < (x+1)^2}_{\text{Inequação 1}} \text{ e } \underbrace{2x+5 \geq 0}_{\text{Inequação 2}} \text{ e } \underbrace{x+1 \geq 0}_{\text{Inequação 3}}$$

- ▶ Resolvendo a inequação 1, obtemos $2x+5 < x^2+2x+1$ e, portanto, $S_1 = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.
- ▶ Resolvendo a inequação 2, obtemos $S_2 = [-5/2, \infty)$.
- ▶ Resolvendo a inequação 3, obtemos $S_3 = [-1, \infty)$.

Portanto, a solução final é $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (2, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução

- ▶ Observemos que, nesse caso, não há nada que garanta que $x - 2 \geq 0$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução

- ▶ Observemos que, nesse caso, não há nada que garanta que $x - 2 \geq 0$. Mais que isso, a forma de resolver o problema difere se $x - 2 \geq 0$ ou $x - 2 < 0$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução

- ▶ Observemos que, nesse caso, não há nada que garanta que $x - 2 \geq 0$. Mais que isso, a forma de resolver o problema difere se $x - 2 \geq 0$ ou $x - 2 < 0$.
- ▶ Por exemplo, a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq 3$ se resolve elevando os dois membros ao quadrado.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução

- ▶ Observemos que, nesse caso, não há nada que garanta que $x - 2 \geq 0$. Mais que isso, a forma de resolver o problema difere se $x - 2 \geq 0$ ou $x - 2 < 0$.
- ▶ Por exemplo, a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq 3$ se resolve elevando os dois membros ao quadrado.
- ▶ Por outro lado, a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq -1$ se resolve apenas exigindo $x^2 - x \geq 0$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução

- ▶ Observemos que, nesse caso, não há nada que garanta que $x - 2 \geq 0$. Mais que isso, a forma de resolver o problema difere se $x - 2 \geq 0$ ou $x - 2 < 0$.
- ▶ Por exemplo, a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq 3$ se resolve elevando os dois membros ao quadrado.
- ▶ Por outro lado, a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq -1$ se resolve apenas exigindo $x^2 - x \geq 0$.
- ▶ Isto nos diz que teremos que resolver o problema em casos (de acordo com $x - 2 \geq 0$ ou $x - 2 < 0$, isto é, conforme $x \geq 2$ ou $x < 2$).

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução



Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, 2)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, 2)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, 2)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2 \iff x^2 - x \geq 0$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, 2)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2 \iff x^2 - x \geq 0$$

Logo, $S_1 = (-\infty, 2) \cap ((-\infty, 0] \cup [1, \infty)) = (-\infty, 0] \cup [1, 2)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, 2)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2 \iff x^2 - x \geq 0$$

Logo, $S_1 = (-\infty, 2) \cap ((-\infty, 0] \cup [1, \infty)) = (-\infty, 0] \cup [1, 2)$.

- ▶ Caso 2. $x \in [2, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, 2)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2 \iff x^2 - x \geq 0$$

Logo, $S_1 = (-\infty, 2) \cap ((-\infty, 0] \cup [1, \infty)) = (-\infty, 0] \cup [1, 2)$.

- ▶ Caso 2. $x \in [2, \infty)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, 2)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2 \iff x^2 - x \geq 0$$

Logo, $S_1 = (-\infty, 2) \cap ((-\infty, 0] \cup [1, \infty)) = (-\infty, 0] \cup [1, 2)$.

- ▶ Caso 2. $x \in [2, \infty)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2 \iff x^2 - x \geq (x - 2)^2$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, 2)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2 \iff x^2 - x \geq 0$$

Logo, $S_1 = (-\infty, 2) \cap ((-\infty, 0] \cup [1, \infty)) = (-\infty, 0] \cup [1, 2)$.

- ▶ Caso 2. $x \in [2, \infty)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2 \iff x^2 - x \geq (x - 2)^2 \iff x \geq 4/3$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, 2)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2 \iff x^2 - x \geq 0$$

Logo, $S_1 = (-\infty, 2) \cap ((-\infty, 0] \cup [1, \infty)) = (-\infty, 0] \cup [1, 2)$.

- ▶ Caso 2. $x \in [2, \infty)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2 \iff x^2 - x \geq (x - 2)^2 \iff x \geq 4/3$$

Logo, $S_2 = [2, \infty) \cap [4/3, \infty) = [2, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, 2)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2 \iff x^2 - x \geq 0$$

Logo, $S_1 = (-\infty, 2) \cap ((-\infty, 0] \cup [1, \infty)) = (-\infty, 0] \cup [1, 2)$.

- ▶ Caso 2. $x \in [2, \infty)$.

$$\sqrt{x^2 - x} \geq x - 2 \iff x^2 - x \geq (x - 2)^2 \iff x \geq 4/3$$

Logo, $S_2 = [2, \infty) \cap [4/3, \infty) = [2, \infty)$.

Logo, a solução final é $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x + 5} > x + 1$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x + 5} > x + 1$.

Solução



Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x + 5} > x + 1$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, -1)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x + 5} > x + 1$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, -1)$.

$$\sqrt{2x + 5} > x + 1$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x + 5} > x + 1$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, -1)$.

$$\sqrt{2x + 5} > x + 1 \iff 2x + 5 \geq 0$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} > x+1$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, -1)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1 \iff 2x+5 \geq 0 \iff x \geq -5/2$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} > x+1$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, -1)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1 \iff 2x+5 \geq 0 \iff x \geq -5/2$$

Logo, $S_1 = (-\infty, -1) \cap [-5/2, \infty) = [-5/2, -1)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} > x+1$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, -1)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1 \iff 2x+5 \geq 0 \iff x \geq -5/2$$

Logo, $S_1 = (-\infty, -1) \cap [-5/2, \infty) = [-5/2, -1)$.

- ▶ Caso 2. $x \in [-1, \infty)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} > x+1$.

Solução



- ▶ **Caso 1.** $x \in (-\infty, -1)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1 \iff 2x+5 \geq 0 \iff x \geq -5/2$$

Logo, $S_1 = (-\infty, -1) \cap [-5/2, \infty) = [-5/2, -1)$.

- ▶ **Caso 2.** $x \in [-1, \infty)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} > x+1$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, -1)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1 \iff 2x+5 \geq 0 \iff x \geq -5/2$$

Logo, $S_1 = (-\infty, -1) \cap [-5/2, \infty) = [-5/2, -1)$.

- ▶ Caso 2. $x \in [-1, \infty)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1 \iff 2x+5 > (x+1)^2$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} > x+1$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, -1)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1 \iff 2x+5 \geq 0 \iff x \geq -5/2$$

Logo, $S_1 = (-\infty, -1) \cap [-5/2, \infty) = [-5/2, -1)$.

- ▶ Caso 2. $x \in [-1, \infty)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1 \iff 2x+5 > (x+1)^2 \iff x^2 - 4 < 0$$

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} > x+1$.

Solução



- ▶ Caso 1. $x \in (-\infty, -1)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1 \iff 2x+5 \geq 0 \iff x \geq -5/2$$

Logo, $S_1 = (-\infty, -1) \cap [-5/2, \infty) = [-5/2, -1)$.

- ▶ Caso 2. $x \in [-1, \infty)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1 \iff 2x+5 > (x+1)^2 \iff x^2 - 4 < 0$$

Logo, $S_2 = [-1, \infty) \cap (-2, 2) = [-1, 2)$.

Como resolver uma inequação radical?

Exemplo

Resolva a inequação $\sqrt{2x+5} > x+1$.

Solução



- ▶ **Caso 1.** $x \in (-\infty, -1)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1 \iff 2x+5 \geq 0 \iff x \geq -5/2$$

Logo, $S_1 = (-\infty, -1) \cap [-5/2, \infty) = [-5/2, -1)$.

- ▶ **Caso 2.** $x \in [-1, \infty)$.

$$\sqrt{2x+5} > x+1 \iff 2x+5 > (x+1)^2 \iff x^2 - 4 < 0$$

Logo, $S_2 = [-1, \infty) \cap (-2, 2) = [-1, 2)$.

Logo, a solução final é $S = S_1 \cup S_2 = [-5/2, 2)$.

FIM