

Inequações

Resolução de inequações por substituição de variável.

Giuliano Boava

Exemplo

Resolva a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$.

Solução

$$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$$

Exemplo

Resolva a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$.

Solução

$$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0, \quad \text{reescrevendo } x^2 = y \quad \Leftrightarrow$$

Exemplo

Resolva a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$.

Solução

$$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0, \quad \text{reescrevendo } x^2 = y \quad \Leftrightarrow \\ y^2 - 5y + 4 \geq 0$$

Exemplo

Resolva a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$.

Solução

$$\begin{aligned}x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0, \quad \text{reescrevendo } x^2 = y &\iff \\y^2 - 5y + 4 \geq 0 &\iff \\y \leq 1 \text{ ou } y \geq 4 &\end{aligned}$$

Exemplo

Resolva a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$.

Solução

$$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0, \quad \text{reescrevendo } x^2 = y \quad \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 5y + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y \leq 1 \quad \text{ou} \quad y \geq 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{x^2 \leq 1} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x^2 \geq 4}$$

Inequação 1

Inequação 2

Exemplo

Resolva a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$.

Solução

$$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0, \quad \text{reescrevendo } x^2 = y \quad \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 5y + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y \leq 1 \quad \text{ou} \quad y \geq 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{x^2 \leq 1} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x^2 \geq 4}$$

Inequação 1

Inequação 2

► $x^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 \leq 0.$

Logo, $S_1 = [-1, 1]$.

Exemplo

Resolva a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$.

Solução

$$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0, \quad \text{reescrevendo } x^2 = y \quad \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 5y + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y \leq 1 \quad \text{ou} \quad y \geq 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{x^2 \leq 1}_{\text{Inequação 1}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x^2 \geq 4}_{\text{Inequação 2}}$$

► $x^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 \leq 0.$

Logo, $S_1 = [-1, 1].$

► $x^2 \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 \geq 0.$

Logo, $S_2 = (-\infty, -2] \cup [2, \infty).$

Exemplo

Resolva a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$.

Solução

$$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0, \quad \text{reescrevendo } x^2 = y \quad \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 5y + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y \leq 1 \quad \text{ou} \quad y \geq 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{x^2 \leq 1}_{\text{Inequação 1}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x^2 \geq 4}_{\text{Inequação 2}}$$

▶ $x^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 \leq 0.$

Logo, $S_1 = [-1, 1].$

▶ $x^2 \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 \geq 0.$

Logo, $S_2 = (-\infty, -2] \cup [2, \infty).$

Portanto, a solução final é $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, \infty).$

Exemplo

Resolva a inequação $x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0$.

Solução

$$x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0$$

Exemplo

Resolva a inequação $x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0$.

Solução

$$x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0, \quad \text{reescrevendo } \sqrt{x} = y \quad \Leftrightarrow$$

Exemplo

Resolva a inequação $x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0$.

Solução

$$x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0, \quad \text{reescrevendo } \sqrt{x} = y \quad \Leftrightarrow \\ y^2 - 8y - 9 \geq 0$$

Exemplo

Resolva a inequação $x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0$.

Solução

$$x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0, \text{ reescrevendo } \sqrt{x} = y \iff$$

$$y^2 - 8y - 9 \geq 0 \iff$$

$$y \leq -1 \text{ ou } y \geq 9$$

Exemplo

Resolva a inequação $x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0$.

Solução

$$x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0, \text{ reescrevendo } \sqrt{x} = y \iff$$

$$y^2 - 8y - 9 \geq 0 \iff$$

$$y \leq -1 \text{ ou } y \geq 9 \iff$$

$$\underbrace{\sqrt{x} \leq -1}_{\text{Inequação 1}} \text{ ou } \underbrace{\sqrt{x} \geq 9}_{\text{Inequação 2}}$$

Exemplo

Resolva a inequação $x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0$.

Solução

$$x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0, \text{ reescrevendo } \sqrt{x} = y \iff$$

$$y^2 - 8y - 9 \geq 0 \iff$$

$$y \leq -1 \text{ ou } y \geq 9 \iff$$

$$\underbrace{\sqrt{x} \leq -1}_{\text{Inequação 1}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\sqrt{x} \geq 9}_{\text{Inequação 2}}$$

- ▶ Na inequação 1, $\sqrt{x} \leq -1$, obtemos $S_1 = \emptyset$.

Exemplo

Resolva a inequação $x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0$.

Solução

$$x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0, \text{ reescrevendo } \sqrt{x} = y \iff$$

$$y^2 - 8y - 9 \geq 0 \iff$$

$$y \leq -1 \text{ ou } y \geq 9 \iff$$

$$\underbrace{\sqrt{x} \leq -1}_{\text{Inequação 1}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\sqrt{x} \geq 9}_{\text{Inequação 2}}$$

- ▶ Na inequação 1, $\sqrt{x} \leq -1$, obtemos $S_1 = \emptyset$.
- ▶ $\sqrt{x} \geq 9 \iff x \geq 81$.
Logo, $S_2 = [81, \infty)$.

Exemplo

Resolva a inequação $x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0$.

Solução

$$x - 8\sqrt{x} - 9 \geq 0, \text{ reescrevendo } \sqrt{x} = y \iff$$

$$y^2 - 8y - 9 \geq 0 \iff$$

$$y \leq -1 \text{ ou } y \geq 9 \iff$$

$$\underbrace{\sqrt{x} \leq -1}_{\text{Inequação 1}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\sqrt{x} \geq 9}_{\text{Inequação 2}}$$

- ▶ Na inequação 1, $\sqrt{x} \leq -1$, obtemos $S_1 = \emptyset$.
- ▶ $\sqrt{x} \geq 9 \iff x \geq 81$.
Logo, $S_2 = [81, \infty)$.

Portanto, a solução final é $S = S_1 \cup S_2 = [81, \infty)$.

FIM